

Feuille d'exercices 2

Exercice 1.

1. Trouver la formule de Taylor d'ordre 2 en 0 des fonction suivante :

$$\ln(1+x), \quad \frac{1}{1+x}, \quad \tan(x),$$

2. Trouver la formule de Taylor d'ordre 2 en $x_0 = 1$ de la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, puis en déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 2.

1. Calculer la dérivée partielle par rapport à x des fonctions suivantes :

$$\ln(1-xy), \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad ye^x \sin(x+y)$$

2. Pouvez-vous préciser le domaine maximal de définition des fonctions précédentes ?

Exercice 3.

On considère la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 4.

Trouver la formule de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1+x+y}$ en $(0, 0)$.

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} e^{x+y} d(x, y), \quad \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} e^{x^2+y^2} d(x, y), \quad \int_{[0,1]^3} \sqrt{1+x+y} \cdot d(x, y, z)$$

Exercice 6. Soit C un corps de \mathbb{R}^2 (resp. de \mathbb{R}^3). On appelle le *volume* de C la valeur $\int_C 1 \cdot d(x, y)$ (resp. la valeur $\int_C 1 \cdot d(x, y, z)$), et pour C un corps de \mathbb{R}^2 (resp. de \mathbb{R}^3) de *volume fini*, on appelle le *barycentre* de C le point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$) donné par

$$x_0 = \frac{\int_C x d(x, y)}{\int_C 1 \cdot d(x, y)}, \quad y_0 = \frac{\int_C y d(x, y)}{\int_C 1 \cdot d(x, y)} \quad \left(\text{resp. } x_0 = \frac{\int_C x d(x, y, z)}{\int_C 1 \cdot d(x, y, z)}, \quad y_0 = \frac{\int_C y d(x, y, z)}{\int_C 1 \cdot d(x, y, z)} \quad z_0 = \frac{\int_C z d(x, y, z)}{\int_C 1 \cdot d(x, y, z)} \right)$$

Calculer le volume et le barycentre des corps suivants :

1. $C = [0, 1] \times [2, 4] \times [1, 3] \subset \mathbb{R}^3$
2. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$