Licence 1, Semestre 1
MOSE1003 Mathématiques
Analyse - Algèbre

Test 2 (trois exos, durée 30 mins)

1 (1+2+1+1=5 pts)- On considère l'équation suivante :

$$(E) \qquad y' = 2y + x + 1$$

1.a) Résoudre son équation homogène associée.

Corrigé : son équation homogène associée est

$$(E_0) \qquad y' = 2y$$

Donc, l'ensemble des solutions est

$$S_{E_0} = \{x \mapsto Ce^{2x} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

1.b) Trouver une solution particulière de (E).

Corrigé : Comme le second membre de l'équation (E) est $x+1$, qui est donc un polynôme de degré 1. De plus, comme le coefficient $2 \neq 0$, il existe alors une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = ax + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes à déterminer. Or $y_p'(x) = a$, on obtient

$$x + 1 = y_p'(x) - 2y_p(x) = a - 2(ax + b) = -2ax + (a - 2b)$$

On a donc

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 1. \end{cases}$$

D'où $a = -1/2$, $b = -3/4$. Donc $y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ est bien une solution particulière de (E).

1.c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Corrigé :

$$S_E = \{y + y_p \mid y \in S_{E_0}\} = \left\{x \mapsto -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + Ce^{2x} \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$

1.d) Trouver la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Corrigé : On cherche donc la constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$-\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{4} + Ce^{2 \cdot 0} = 1$$

D'où $C = \frac{7}{4}$, d'où la solution de ce problème de Cauchy :

$$y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}e^{2x}.$$

2 (1+2+2=5 pts) - On considère l'équation suivante :

$$(E) \qquad y' = 2xy + x.$$

2.a) Résoudre son équation homogène associée.

Corrigé : Son équation homogène associée est

$$(E_0) \qquad y' = 2xy.$$

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$, on a

$$S_{E_0} = \{x \mapsto Ce^{x^2} \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

2.b) Calculer $\int xe^{-x^2}dx$. (**Indication :** on pourra utiliser la formule de changement de variable, on pourra aussi trouver directement une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$)

Corrigé : On a

$$\int xe^{-x^2}dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int (-x^2)'e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \left(e^{-x^2}\right)' dx = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C_1$$

avec C_1 une constante.

2.c) Trouver une solution particulière de (E) **en utilisant la méthode de la variation de la constante**.

Corrigé : On cherche donc une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) = C(x)e^{x^2}$$

avec $C(x)$ une fonction dérivable à déterminer. On a donc

$$y_p'(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)\left(e^{x^2}\right)' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}.$$

Par suite,

$$y_p'(x) - 2xy_p(x) = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = C'(x)e^{x^2}.$$

Donc, la fonction $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$ est solution de (E) si et seulement si

$$C'(x)e^{x^2} = x$$

C'est-à-dire, $C'(x) = xe^{-x^2}$. D'après la question 2.b), on sait que la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$, on peut donc prendre $C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. D'où une solution particulière de (E) :

$$y_p(x) = C(x)e^{x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

3 (1+2+2.5+2.5+2=10 pts) - On va étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = 2\cos(x) + x^2 + 3.$$

3.a) Trouver son équation caractéristique associée.

3.b) Résoudre l'équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation (E).

3.c) Trouver une solution particulière de l'équation

$$(E_1) \qquad y'' - 2y' + y = 2\cos(x).$$

3.d) Trouver une solution particulière de l'équation

$$(E_2) \qquad y'' - 2y' + y = x^2 + 3.$$

3.e) Donner toutes les solutions de (E).

Corrigé : C'est l'exercice 5 du DS 1 de l'année 2009-2010. Voir ici pour le corrigé détaillé :

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jtong/DS1_2009-2010_Corr.pdf`