LICENCE 1, SEMESTRE 1
MOSE1003 MATHÉMATIQUES
ANALYSE - ALGÈBRE

Test 3 (deux exos, durée 30 mins)

1 (2+4+2+2=10 pts)- Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.a) Calculer A^2.

Corrigé :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 29 \\ 20 & 33 & 42 \\ 31 & 51 & 65 \end{pmatrix}$$

1.b) On admet que la matrice A est *inversible*. Inverser cette matrice A en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Corrigé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Par suite, on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.c) Calculer le vecteur colonne $A^{-1} \cdot b$.

Corrigé :

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.d) Donner l'ensemble des solutions du système ci-dessous (**Indication :** on pourra ou bien le résoudre directement avec la méthode du pivot de gauss, ou bien utiliser le résultat de la question (1.c) en écrivant le système ci-dessous sous forme matricielle).

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 5y + 6z = 3. \end{cases}$$

Corrigé : Notons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alors le système ci-dessus est équivalent à l'équation matricielle $AX = b$. Donc la solution est donnée par $X = A^{-1} \cdot b$, c'est-à-dire :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où la solution du système ci-dessus

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2 (1+1+2+4+3 = 11 points)- On considère la matrice 2×2 suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.a) Calculer $\det(B)$.

Corrigé : $\det(B) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3$.

2.b) La matrice B est-t-elle inversible ? Justifier votre réponse.

Corrigé : Oui car son déterminant est non nul.

2.c) Trouver le polynôme caractéristique de B.

Corrigé : Le polynôme caractéristique est

$$\det(X \cdot \mathrm{I}_2 - B) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1)^2 - (-2) \times (-2) = X^2 - 2X - 3$$

2.d) Trouver les valeurs propres de B, puis déterminer les vecteurs propres de B.

Corrigé : Comme $X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$, les deux valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Pour trouver les vecteurs propres de B par rapport à λ_1, on considère l'équation $(B - \lambda_1 \mathrm{I}_2)X = 0$: C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Les solutions sont

$$\begin{cases} x = s \in \mathbb{R} \\ y = s \end{cases}$$

Donc, si l'on pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation ci-dessus sont les multiples de v_1, par suite, les vecteurs propres de B par rapport à la valeur propre λ_1 sont les multiples *non nuls* de v_1. D'une manière similaire, on peut prouver que les vecteurs propres par rapport à λ_2 sont les multiples *non nuls* de v_2, avec

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.e) La matrice B est-t-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice 2×2 *inversible* Ω telle que $\Omega^{-1} B \Omega$ soit diagonale ; si non, donner une justification.

Corrigé : Oui, elle est diagonalisable. On peut prendre

$$\Omega = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\Omega^{-1} B \Omega = \mathrm{diag}(3, -1)$.