Math. Z. (2010) 264:521–569
DOI 10.1007/s00209-009-0478-y

Mathematische Zeitschrift

Diviseur thêta et formes différentielles

Jilong Tong

Received: 19 June 2008 / Accepted: 30 December 2008 / Published online: 30 January 2009

Abstract This article concerns the geometry of algebraic curves in characteristic $p > 0$. We study the geometric and arithmetic properties of the theta divisor Θ associated to the vector bundle of locally exact differential forms of a curve. Among other things, we prove that, for a generic curve of genus ≥ 2, this theta divisor Θ is always geometrically normal. We give also some results in the case where either p or the genus of the curve is small. In the last part, we apply our results on Θ to the study of the variation of fundamental group of algebraic curves. In particular, we refine a recent result of Tamagawa on the specialization homomorphism between fundamental groups at least when the special fiber is supersingular.

Keywords Fibré des formes différentielles localement exactes · Diviseur thêta · Groupe fondamental

Mathematics Subject Classification (2000) 14H60 (primary); 14H30 · 14K30 (secondary)

0 Introduction

Le but de ce travail est l'étude géométrique du diviseur thêta associé au faisceau des formes différentielles localement exactes sur une courbe, en caractéristique $p > 0$. Rappelons brièvement la situation. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X une courbe projective lisse connexe de genre $g \geq 1$ sur k. Notons X_1 l'image réciproque de X par le Frobenius absolu de k, J_1 sa jacobienne. Soit $F : X \to X_1$ le Frobenius relatif. Définissons le faisceau B par la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \to F_*\mathcal{O}_X \to B \to 0.$$

J. Tong (✉)
CMLS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
e-mail: tong@math.polytechnique.fr

Alors, B est un fibré vectoriel sur X_1 de rang $p-1$ et de pente $g-1$. Le point de départ de cet article est le théorème suivant dû à Raynaud [38]: pour un faisceau inversible L de degré 0 assez général, $H^0(X_1, B \otimes L) = 0$. Par conséquent, le fibré B possède un diviseur thêta $\Theta = \Theta_B$, défini comme déterminant du complexe $\mathrm{R}f_*(B \otimes \mathcal{P})$, où $f : X_1 \times J_1 \to J_1$ est le morphisme de projection, et $\mathcal{P}$ est un faisceau de Poincaré sur $X_1 \times J_1$. C'est un diviseur effectif sur la jacobienne J_1 de X_1 dont le support est l'ensemble des $L \in J_1$ tels que $H^0(X_1, B \otimes L) \neq 0$. Le diviseur Θ est canoniquement attaché à la courbe X et algébriquement équivalent à $(p-1)\Theta_{\text{class}}$, où Θ_{class} désigne la polarisation principale naturelle de la jacobienne J_1.

Pour $p = 2$, B est un faisceau inversible, racine carrée canonique du faisceau des formes différentielles sur X_1, et Θ est un diviseur thêta classique; en particulier il est normal irréductible et ses singularités ont été intensivement étudiées.

Par contre, pour p impair, on sait très peu de choses sur Θ, mise a part son existence, connue depuis plus de 25 ans. La littérature sur les diviseurs thêta des fibrés est récente et concerne surtout le rang 2. Pour $p > 0$, nous prouvons que Θ est normal lorsque X est une courbe assez générale. Lorsque $p = 3$ et $g \geq 2$, nous montrons que Θ est réduit, et qu'il est intègre si $g = 2$ et $p = 3$. Nous donnons aussi des exemples où Θ n'est pas normal. Pour $p > 2$, nous ignorons si Θ est toujours irréductible.

A côté de ses propriétés géométriques, le diviseur thêta présente un intérêt arithmétique: comme l'a observé Raynaud, les points de torsion d'ordre n premier à p, contenus dans Θ contr(lent les revêtements étales cycliques $Y \to X$ de degré n, tels que la partie nouvelle de la jacobienne de Y ne soit pas ordinaire. Du coup, le diviseur Θ a été utilisé pour étudier la variation du groupe fondamental en caractéristique $p > 0$, en fonction de la variation de X [37,40,44]. Dans ce problème, on rencontre de sérieuses difficultés, s'il existe des composantes irréductibles de Θ qui sont des translatés de sous-varités abéliennes. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons à cette question, en particulier au chapitre 4. Nous pouvons alors améliorer les résultats de Raynaud et Tamagawa, du moins si la fibre spéciale est supersingulière.

Analysons brièvement le contenu des divers chapitres.

Le chapitre 1 commence par la définition du diviseur Θ. Soit $X \to S$ une courbe lisse. Lorsque elle possède une section, on dispose d'un faisceau de Poincaré $\mathcal{P}$ sur $X_1 \times_S J_1$ (où J_1 est la jacobienne de X_1/S). On considère $\mathrm{R}f_*(B \otimes \mathcal{P})$, comme un objet de $\mathrm{D}^b_c(J_1)$ la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{J_1}$-modules à cohomologie cohérente et a degrés bornées. D'après [38], ce complexe est concentré en degré 1, par suite, $\mathcal{Q} := \mathrm{R}^1 f_*(B \otimes \mathcal{P})$ est un $\mathcal{O}_{J_1}$-module de dimension projective 1. Le diviseur Θ est alors défini comme le déterminant de $\mathcal{Q}$, et sa construction ne dépend pas du choix de faisceau de Poincaré $\mathcal{P}$. Par conséquent, par descente étale, on peut attacher canoniquement le diviseur Θ à n'importe quelle S-courbe lisse. Afin d'employer les techniques de dégénérescence, on présente aussi une définition de Θ pour une S-courbe semi-stable en suivant une stratégie analogue.

Ensuite, on rassemble les premières propriétés de Θ à partir de sa définition. Pour une S-courbe lisse, le fibré B est équipé d'un accouplement alterné non-dégénéré a valeurs dans $\Omega^1_{X_1/S}$ le faisceau canonique de X_1/S. Il en résulte que B est auto-dual pour la dualité de Serre. Le diviseur Θ est donc symétrique, et même totalement symétrique au-sens de Mumford [30] pour p impair. La transformation de Fourier-Mukai intervient pour établir un lien entre B et le faisceau $\mathcal{Q}$, qui sera utile pour montrer certaines propriétés du diviseur Θ pour la courbe générique. La dualité de Serre-Grothendieck nous permet de montrer que les faisceaux $\mathcal{Q}$ et $(-1)^*\mathcal{Q}$ sont en dualité à valeurs dans le faisceau canonique de Θ.

Une particularité du diviseur thêta, liée au noyau du Verschiebung, est la "propriété de Dirac". Cette propriété sera utilisée très souvent dans l'étude du diviseur Θ. Comme dans le cas classique, dès que $g \geq 4$, le faisceau $\mathcal{Q}$ n'est jamais inversible, en particulier, le diviseur Θ a toujours des singularités lorsque la courbe est de genre $g \geq 4$. Puis, nous revisitons la démonstration de Joshi [21] du fait que le faisceau B est stable lorsque $g \geq 2$, en en donnant une preuve plus directe, qui fournit aussi un contr(le effectif du degré des sous-fibrés de B. A la fin de ce chapitre, on rassemble quelques questions qui se posent naturellement a propos de l'étude géométrique et arithmétique du diviseur Θ, et qui feront aussi l'objet des chapitres suivants.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude différentielle de Θ. On rappelle d'abord le travail de Laszlo [24], sur la multiplicité du diviseur thêta universel. Puis, on applique ce résultat à l'étude de la multiplicité de Θ, en particulier aux points d'ordre p, et met en évidence le rle des formes de Cartier. Nous faisons également l'étude différentielle du schéma de Hilbert $\mathcal{H}$ des faisceaux inversibles de degré 0 plongés dans B. On examine notamment les points $x \in \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est lisse de dimension $g-1$, ce résultat sera utile dans l'étude de Θ en caractéristique $p = 3$.

Le but principal du chapitre 3 est de montrer que pour la courbe générique de genre ≥ 2 dans l'espace de modules des courbes, le diviseur $\Theta = \Theta_{\text{gen}}$ est géométriquement intègre et normal. La preuve est un peu technique. Elle utilise: (i) les courbes réductibles dégénérées, (ii) l'action de monodromie, (iii) les déformations des points doubles ordinaires (de codimension 1), (iv) le fait que le groupe de Néron-Severi de la jacobienne de la courbe générique est isomorphe à $\mathbf{Z}$, et (v) une propriété de GAGA formel pour un schéma qui n'est pas forcément propre (qui est montrée dans SGA2). Examinons par exemple le cas du genre 2. On dégénère la courbe générique X_η en une courbe X_s semi-stable constituée de 2 courbes elliptiques (ordinaires) génériques se coupant transversalement, telles que l'action de la monodromie sur les points d'ordre p soit maximale. Alors le diviseur Θ relatif est une courbe semi-stable, à fibre spéciale géométrique Θ_s formée de courbes elliptiques telles que la monodromie permute transitivement les points doubles ordinaires. Alors, ou bien la fibre générique Θ_η est lisse, et l'on gagne, ou bien sa normalisation est formée de courbes elliptiques. Ce dernier cas est exclu car la jacobienne J_η de la courbe générique X_η ne contient pas de courbes elliptiques [27]. La preuve pour les cas $g \geq 3$ se fait par récurrence sur le genre g, en utilisant une stratégie analogue et les résultats de SGA2.

Au chapitre 4, nous étudions Θ lorsque g est petit ou lorsque $p = 3$. Pour $p = 3$, B est un fibré vectoriel de rang 2, et l'on a une certaine prise sur le lieu singulier de Θ. Cette particularité nous permet de montrer que Θ est réduit et ne contient pas de composantes irréductibles translatées d'une sous-variété abélienne. Si on suppose de plus $g = 2$, on montre que Θ est intègre. Par contre, pour une courbe de genre $g = 2$ en caractéristique $p \geq 5$, on ne sait pas si un tel énoncé reste valable. Toutefois, supposons la courbe X ordinaire (de genre 2), nous montrons qu'aucune composante irréductible de Θ n'est le translaté d'une courbe elliptique.

Dans le chapitre 5, on donne des applications du diviseur Θ à l'étude du groupe fondamental d'une courbe en caractéristique $p > 0$. Le point de départ est le fait suivant: les points de torsion, d'ordre premier à p, situés sur le diviseur thêta déterminent un quotient métabélien du groupe fondamental π_1, le $\pi_1^{\text{new,ord}}$ qui rend compte des revêtements cycliques finis étales $Y \to X$ de degré premier à p, tels que la "partie nouvelle" de la jacobienne de Y soit ordinaire. Supposons que $\pi_1^{\text{new,ord}}$ soit constant quand on passe de la fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$ a la fibre spéciale géométrique $X_{\bar{s}}$. Alors la courbe X/S est-elle constante, du moins lorsque X_s est définissable sur un corps fini? Une réponse positive permettait de préciser les résultats de éamagawa. En fait, faute de renseignements suffisants sur le diviseur Θ et sur la saturation de la torsion, on rencontre des difficultés très sérieuses. Dans cet article, on ne peut donner une réponse positive à cette question que dans le cas où la jacobienne de X/S a une fibre spéciale supersinguliàre.

1 Le fibré B des formes différentielles localement exactes et son diviseur thêta

1.1 Définition du diviseur thêta

Sauf mention du contraire, S désigne un schéma localement noethérien de caractéristique $p > 0$ (c'est-à-dire, $p \cdot 1_{\mathcal{O}_S} = 0$).

1.1.1 Le cas relatif lisse

Soit X/S une courbe relative propre lisse à fibres géométriques connexes de genre $g \geq 0$. Définissons X_1 par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S \arrow[r, "Fr_S"] & S \end{tikzcd}$$

où $Fr_S : S \to S$ désigne le Frobenius absolu. Soit $F : X \to X_1$ le Frobenius relatif. On dispose de la suite exacte courte suivante:

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \to F_*\mathcal{O}_X \to B \to 0,$$

où le faisceau B est, par définition, *le faisceau des formes différentielles localement exactes sur* X_1. C'est un fibré vectoriel de rang $p-1$ sur X_1.

Remarque 1.1.1.1 Si $S = \mathrm{Spec}(k)$, et si X est la droite projective sur S. Alors $B \simeq \mathcal{O}_{X_1}(-1)^{\oplus p-1}$.

Supposons désormais dans ce chapitre que $g \geq 1$. Notons J (resp. J_1) la jacobienne de X/S (resp. X_1/S). Alors J_1 est l'image réciproque de J/S par le Frobenius absolu $F_S : S \to S$. Formons le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_S J_1 \arrow[r, "pr_{X_1}"] \arrow[d, "pr_{J_1}"] & X_1 \arrow[d] \\ J_1 \arrow[r] & S \end{tikzcd} .$$

Supposons d'abord que X/S admette une section $\varepsilon \in X(S)$, d'où une section $\varepsilon_1 \in X_1(S)$. Soit $\mathcal{P}_{\varepsilon,1}$ le faisceau de Poincaré rigidifié sur $X_1 \times_S J_1$ associé à ε ([2] 8.2/1 et 8.2/4). Par définition, $\mathcal{P}_{\varepsilon,1}$ est un faisceau inversible sur $X_1 \times_S J_1$ muni d'un isomorphisme $u : \varepsilon_{1,J_1}^*(\mathcal{P}_{\varepsilon,1}) \simeq \mathcal{O}_{J_1}$ (où $\varepsilon_{1,J_1} : J_1 \to X_1 \times_S J_1$ est le changement défini par la section $\varepsilon_1 \in X_1(S)$). Considérons le complexe $\mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1})$ qui est un objet de $\mathrm{D}_c^b(J_1)$, la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{O}_{J_1}$-modules à degrés bornés et à cohomologie cohérente. Comme B est un faisceau cohérent sur X_1, plat sur S et a fibres de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, d'après [29] (chap. 2, § 5 page 46 Theorem) $\mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1}) \in \mathrm{D}_c^b(J_1)$ peut être localement sur J_1 représenté par un complexe de faisceaux en degré 0 et 1:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{M}^0 \xrightarrow{u} \mathcal{M}^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

où $\mathcal{M}^0, \mathcal{M}^1$ sont libres de type fini et de même rang.

Rappelons le résultat suivant, qui est notre point de départ pour la théorie du diviseur Θ.

Théorème 1.1.1.2 ([38] Théorème 4.1.1.) *Si* $S = \mathrm{Spec}(k)$ *avec* k *un corps algébriquement clos de caractéristique* $p > 0$. *Alors* $h^0(B \otimes L) = 0$ *pour* L *général dans* $J_1(k)$.

Il en résulte que la cohomologie de $\mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1})$ est concentrée en degré 1. Soit $\mathcal{Q} = \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1})$, alors la formation de $\mathcal{Q}$ commute aux changements de base $S' \to S$ et $\mathcal{Q}$ est plat sur S. De plus, pour chaque $s \in S$, $\det(u)_s$ est injectif et définit un diviseur de Cartier effectif relatif sur J_1/S, que l'on note Θ_B ou simplement Θ. Alors Θ est le sous-schéma fermé de J_1 défini par le 0-ième idéal de Fitting de $\mathcal{Q}$ (pour la définition d'idéal de Fitting, voir [8] Definition 20.4.).

Le faisceau $\mathcal{Q}$ dépend du choix de la section ε. Plus précisément, si $\varepsilon' \in X(S)$ est une autre section de X/S, $\varepsilon'_1 \in X_1(S)$ la section de X_1 associée. Notons $\mathcal{P}_{\varepsilon',1}$ le faisceau de Poincaré rigidifié associé à ε'_1, et $\mathcal{Q}' = \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}\left(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon',1}\right)$. Par définition du faisceau de Poincaré rigidifié, $\mathcal{P}_{\varepsilon',1} = \mathcal{P}_{\varepsilon,1} \otimes pr_{J_1}^* \varepsilon_1'^* \mathcal{P}_{\varepsilon,1}^{-1}$. On obtient donc

$$\mathcal{Q}' = \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}\left(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon',1}\right) = \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}\left(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1} \otimes pr_{J_1}^* \varepsilon_1'^* \mathcal{P}_{\varepsilon,1}^{-1}\right) = \mathcal{Q} \otimes \varepsilon_1'^* \mathcal{P}_{\varepsilon,1}^{-1}.$$

Donc $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ diffèrent par tensorisation par un faisceau inversible algébriquement équivalent à zéro de J_1.

Par suite, Θ ne dépend pas du choix de la section $\varepsilon \in X(S)$. Par descente étale, on en déduit l'existence du diviseur Θ en général (dans le cas où on ne suppose plus que X/S admette une section). De plus, la formation de Θ/S est compatible aux changements de base $S' \to S$.

1.1.2 Le cas relatif semi-stable

Soit maintenant X une courbe semi-stable sur S, c'est-à-dire, une courbe relative propre plate sur S dont les fibres géométriques sont réduites connexes, avec pour seules singularités des points doubles ordinaires. Comme dans le cas lisse, notons X_1 l'image réciproque de X par le Frobenius absolu $F_S : S \to S$, et $F : X \to X_1$ le Frobenius relatif.

Comme X/S est semi-stable, le morphisme naturel $\mathcal{O}_{X_1} \to F_*(\mathcal{O}_X)$ est universellement injectif pour les changements de base $S' \to S$. Définissons le faisceau cohérent B par la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \to F_*(\mathcal{O}_X) \to B \to 0.$$

Alors B est un $\mathcal{O}_{X_1}$-module cohérent, plat sur $\mathcal{O}_S$ dont la formation est compatible aux changements de base $S' \to S$.

Notons $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (resp. $\mathrm{Pic}_{X_1/S}$) le foncteur de Picard de X/S (resp. de X_1/S), d'après M. Artin ([2] 8.3/2), $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (resp. $\mathrm{Pic}_{X_1/S}$) est représentable par un espace algébrique en groupes lisse sur S. Notons J (resp. J_1) la composante neutre de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (resp. de $\mathrm{Pic}_{X_1/S}$), d'aprés Deligne ([2] 9.4/1), J (resp. J_1) est représentable par un schéma semi-abélien sur S.

Ensuite, formons le diagramme cartésien suivant:

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_S J_1 \arrow[r, "pr_{X_1}"] \arrow[d, "pr_{J_1}"] & X_1 \arrow[d] \\ J_1 \arrow[r] & S \end{tikzcd}.$$

Procédons comme dans le paragraphe précédent (§ 1.1.1) pour associer à B un diviseur thêta Θ. Lorsque X/S admet une section $\varepsilon \in X(S)$, notons $\varepsilon_1 \in X_1(S)$ la section de

X_1/S associée a ε. Nous disposons d'un faisceau de Poincaré rigidifié $\mathcal{P}_{\varepsilon,1}$ sur $X_1 \times J_1$. On peut donc considérer le complexe $\mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr^*_{X_1}\mathcal{B} \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1}) \in \mathrm{D}^b_c(J_1)$. Là encore, il y a un seul objet de cohomologie non nul en degré 1 ([40] la remarque après la Proposition 1.1.2) $\mathcal{Q} = \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}(pr^*_{X_1}\mathcal{B} \otimes \mathcal{P}_{\varepsilon,1})$. Le diviseur de Cartier Θ sur J_1 est défini comme le 0-ième idéal de Fitting du faisceau $\mathcal{Q}$. La définition de $\mathcal{Q}$ dépend du choix de la section $\varepsilon \in X(S)$: soient $\varepsilon' \in X(S)$ une autre section, $\mathcal{Q}'$ le faisceau analogue, alors $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ diffèrent entre eux par un faisceau inversible sur J_1. Donc la définition de Θ ne dépend pas du choix de ε. Par suite, dans le cas général où nous ne supposons plus que X/S admette une section, nous pouvons encore définir le diviseur thêta Θ, et sa formation est compatible aux changements de base $S' \to S$.

Remarque 1.1.2.1 Dans cette remarque, $S = \mathrm{Spec}(k)$ avec k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soient X/k une courbe semi-stable, $\pi : \widetilde{X} \to X$ sa normalisée. Alors l'image réciproque $\pi_1 : \widetilde{X}_1 \to X_1$ de π par le Frobenius absolu $Fr_k : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(k)$ est la normalisée de X_1. Notons $\widetilde{J}_1$ la jacobienne de $\widetilde{X}_1$, d'après [2] 9.2/8, J_1 est une extension de $\widetilde{J}_1$ par un tore T:

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow J_1 \xrightarrow{\nu} \widetilde{J}_1 \longrightarrow 0 .$$

avec $\nu : J_1 \to \widetilde{J}_1 = J_{\widetilde{X}_1/k}$ le morphisme naturel induit par $\pi_1 : \widetilde{X}_1 \to X_1$. Notons $\widetilde{B}$ le faisceau des formes différentielles localement exactes sur $\widetilde{X}_1$. D'après la fonctorialité du Frobenius relatif ([15], Exposé XV, § 1, Proposition 1(a)), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \widetilde{X}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ X & \xrightarrow{F} & X_1 \end{array} .$$

Alors $B = \pi_{1,*}\widetilde{B}$ ([40] la remarque après la Proposition 1.1.2). Notons $\widetilde{\Theta} \subset \widetilde{J}_1$ le diviseur thêta sur $\widetilde{J}_1$ associé à $\widetilde{B}$. Alors $\Theta = \nu^*(\widetilde{\Theta})$ comme diviseur.

1.2 Les premières propriétés de Θ

Dans cette section, sauf mention du contraire, S est un schéma localement noethérien de caractéristique $p > 0$, X/S est une courbe propre lisse à fibres géométriques connexes de genre $g \geq 1$.

1.2.1 Auto-dualité

Rappelons que l'on a la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/S} \xrightarrow{c} \Omega^1_{X_1/S} \longrightarrow 0 ,$$

dans laquelle la flèche $c : F_*(\Omega^1_{X/S}) \to \Omega^1_{X_1/S}$ désigne l'opérateur de Cartier de X/S. L'application $(f, g) \mapsto c(fdg)$ de $F_*(\mathcal{O}_X) \times F_*(\mathcal{O}_X) \to \Omega^1_{X_1/S}$ définit, par passage au quotient, une application bilinéaire alternée:

$$(\cdot, \cdot) : B \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} B \to \Omega^1_{X_1/S}$$

Proposition 1.2.1.1 ([38], § 4.1) *Cet accouplement est non-dégénéré. Donc B est auto-dual sous la dualité de Serre.*

1.2.2 Le cas où $p = 2$

Supposons dans ce numéro que $S = \mathrm{Spec}(k)$ avec k un corps algébriquement clos de caractéristique $p = 2$. Comme $p = 2$, le faisceau B des formes différentielles localement exactes est inversible sur X_1. Par l'auto-dualité de B (1.2.1.1), B est une racine carrée canonique de $\Omega^1_{X_1/k}$ (c'est-à-dire, une thêta caractéristique canonique de X_1/k). Le diviseur Θ est donc un diviseur thêta classique symétrique de J_1. Le résultat suivant découle de la théorie classique des courbes algébriques.

Théorème 1.2.2.1 [24] *Gardons les notations ci-dessus. Alors (1) le diviseur Θ est irréductible et normal; (2) pour tout $x \in \Theta \subset J_1$, la multiplicité de Θ en x, notée* $\mathrm{mult}_x(\Theta)$*, est égale à $h^0(X_1, B \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} L_x)$, où L_x est le faisceau inversible de degré 0 correspondant à $x \in J_1$.*

1.2.3 La classe d'équivalence linéaire de Θ (cas $p \geq 3$)

Supposons $p \geq 3$ dans ce numéro. Pour $d \geq 1$ un entier, notons $X_1^{(d)}$ le produit symétrique de X_1/S, comme X_1/S est lisse, $X_1^{(d)}$ l'est aussi. Pour m un entier, notons $J_1^{[m]}$ le schéma qui classifie les faisceaux inversibles de degré m sur X_1/S.

Considérons l'application

$$X_1^{(g-1)} \to J_1^{[g-1]}$$

définie par $(x_1, \ldots, x_{g-1}) \mapsto \mathcal{O}_X(x_1 + \ldots + x_{g-1})$. Son image schématique est un diviseur Δ de $J^{[g-1]}$, réalisation canonique du diviseur thêta classique Θ_{class}. Comme $p \geq 3$, localement sur S pour la topologie étale, la courbe X_1/S admet une thêta caractéristique, donc un diviseur thêta classique symétrique.

Proposition 1.2.3.1 ([40] Proposition 1.1.4) *Si $p \geq 3$, Θ est un diviseur symétrique de J_1. Si de plus, X_1/S admet une thêta caractéristique L, alors Θ est rationnellement équivalent au translaté de $(p-1)\Delta$ par L^{-1}.*

Corollaire 1.2.3.2 *Le diviseur Θ est algébriquement équivalent à $(p-1)\Theta_{\mathrm{class}}$.*

Supposons $p \geq 3$. Notons $\mathrm{Kum} = \mathrm{Kum}_{J_1/S}$ le S-schéma, variété de Kummer, quotient de J_1 par $\{\pm 1\}$. Alors Kum est un S-schéma propre et plat, à fibres géométriques normales, dont la formation commute aux changements de base $S' \to S$. Soit U l'ouvert de J_1 complément des points d'ordre divisant 2, et V son image dans Kum. Alors le morphisme de quotient $U \to V$ est fini étale de degré 2.

Proposition 1.2.3.3 *Gardons les notations ci-dessus, et supposons $p \geq 3$. Alors Θ se descend canoniquement sur* $\mathrm{Kum}_{J_1/S}$ *en $\widetilde{\Theta}$ qui est un diviseur de Cartier positif.*

Corollaire 1.2.3.4 *Supposons $p \geq 3$, alors Θ est totalement symétrique au sens de Mumford* ([30], Page 305 definition). *Pour un point $x \in J_1$ d'ordre divisant 2, notons* $\mathrm{mult}_x(\Theta)$ *la multiplicité de Θ en x, alors* $\mathrm{mult}_x(\Theta) \equiv 0 \pmod 2$.

Démonstration de la Proposition 1.2.3.3 Pour le cas $g = 1$, la conclusion résulte de la description explicite de Θ pour les courbes elliptiques (Corollaire 1.2.7.10). On peut donc supposer $g \geq 2$. Comme Θ est symétrique, $\Theta|_U$ se descend en $\widetilde{\Theta}_V$ diviseur de Cartier relatif sur V, par descente étale. Aux points de $x \in \mathrm{Kum} - V$, on a $\mathrm{prof}_x(\mathcal{O}_{\mathrm{Kum}}) \geq 2$. Donc si le diviseur de Cartier $\widetilde{\Theta}$ existe, son idéal de définition sera égal à $i_*\left(\mathcal{O}_V(-\widetilde{\Theta}_V)\right)$ ($\subset i_*\mathcal{O}_V \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{Kum}}$, d'après SGA2), où $i : V \to \mathrm{Kum}$ est l'inclusion. Pour montrer que ce faisceau d'idéaux est inversible, on peut faire une extension étale de S, et donc supposer que X_1 possède une thêta caractéristique, et donc un diviseur thêta classique symétrique $\Theta_{\mathrm{class,sym}}$. Alors la norme $\mathrm{Nm}_{J_1/\mathrm{Kum}}(\Theta_{\mathrm{class,sym}}) = \widetilde{\Theta}_1$ est un diviseur de Cartier sur Kum qui descend $2\Theta_{\mathrm{class,sym}}$. On a vu (Proposition 1.2.3) que Θ et $(p-1)\Theta_{\mathrm{class,sym}}$ sont linéairement équivalents. Alors $\left(\frac{p-1}{2}\right)\widetilde{\Theta}_1$ est un diviseur de Cartier sur Kum, qui sur V est linéairement équivalent à $\widetilde{\Theta}_V$. Finalement, $i_*\left(\mathcal{O}_V(-\widetilde{\Theta}_V)\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{Kum}}\left(-\left(\frac{p-1}{2}\widetilde{\Theta}_1\right)\right)$ est inversible. □

1.2.4 Le faisceau $\mathcal{Q}$ et la transformation de Fourier-Mukai

Pour un schéma abélien A/S, notons $\mathcal{F} : \mathrm{D}^b_{\mathrm{c}}(A) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{c}}(A^\vee)$ le foncteur de Fourier-Mukai pour A défini par

$$\mathcal{F}(\cdot) = \mathrm{R}\pi_{2,*}(\mathcal{L} \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{L}\pi_1^*(\cdot)),$$

avec $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A \times_S A^\vee)$ le faisceau de Poincaré normalisé et $\pi_1 : A \times_S A^\vee \to A$, $\pi_2 : A \times_S A^\vee \to A^\vee$ les deux projections canoniques. Pour un entier i, notons $\mathcal{F}^i(L)$ le i-ième faisceau de cohomologie de $\mathcal{F}(L)$ pour un objet $L \in \mathrm{D}^b_{\mathrm{c}}(A)$. On renvoie le lecteur à [28] pour les propriétés fondamentales de la transformation de Fourier-Mukai, ou à [25] § 1 pour un résumé.

Supposons dans ce numéro que X/S admette une section $\varepsilon \in X(S)$. D'où une section $\varepsilon_1 \in X_1(S)$, et le faisceau de Poincaré rigidifié $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{\varepsilon,1}$ associé sur $X_1 \times_S J_1$ à ε_1. Par conséquent, X_1/S admet un faisceau de Poincaré rigidifié $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{1,\varepsilon_1}$ pour la section $\varepsilon_{1,J_1} : J_1 \to X_1 \times_S J_1$. Soit $i_1 : X_1 \to \mathrm{Alb}(X_1/S) = J_1^\vee$ le plongement d'Albanese tel que $i_1(\varepsilon_1) = 0 \in J_1^\vee$. Comme d'habitude, notons $pr_{J_1} : X_1 \times_S J_1 \to J_1$ et $pr_{X_1} : X_1 \times_S J_1 \to X_1$ les deux projections canoniques.

Le faisceau $\mathcal{Q}$. Rappelons d'abord que, par définition, $\mathcal{Q} = \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1)$(§ 1.1.1).

Lemme 1.2.4.1 (1) *Le faisceau $\mathcal{Q}$ est en fait un $\mathcal{O}_\Theta$-module.*

(2) *Soit $x \in \Theta$ un point et notons $\mathcal{Q}(x) := \mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_{\Theta,x}} k(x)$. Alors $\dim_{k(x)}(\mathcal{Q}(x)) = 1$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ est inversible comme $\mathcal{O}_\Theta$-module dans un voisinage de $x \in \Theta$.*

(3) *Le faisceau $\mathcal{Q}$ est un $\mathcal{O}_{J_1}$-module de Cohen-Macaulay dès que S est régulier.*

Démonstration Les assertions (1) et (2) sont immédiates. Pour (3), il suffit de remarquer que $\mathcal{Q}$ admet, localement pour la topologie de Zariski, une résolution libre de longueur 1 sur J_1 (on renvoie à § 1.1.1 pour l'existence d'une telle résolution). □

Formons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times_S J_1 \arrow[r, "i_1 \times 1_{J_1}"] \arrow[d, "pr_{X_1}"] & J_1^\vee \times_S J_1 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & J_1 \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, "i_1"] & J_1^\vee \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

dont les carrés sont cartésiens. Soit $\mathcal{L}_1 \in \mathrm{Pic}(J_1 \times_S J_1^\vee)$ le faisceau de Poincaré normalisé. Considérons la transformation de Fourier-Mukai du faisceau $i_{1,*}B$ sur $J_1^\vee$, alors on a les isomorphismes canoniques suivants (rappelons que l'on a une identification canonique $(J_1^\vee)^\vee \simeq J_1$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(i_{1,*}B) &= \mathrm{R}\pi_{2,*}(\pi_1^* i_{1,*}B \otimes \mathcal{L}_1)\\ &\simeq \mathrm{R}\pi_{2,*}((i_1 \times 1_{J_1})_* pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{L}_1)\\ &\simeq \mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{L}_1).\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.1.1.2, B admet un diviseur thêta, on en déduit que $\mathcal{F}(i_{1,*}B) \simeq \mathrm{R}^1 pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1)[-1] = \mathcal{Q}[-1]$ dans $\mathrm{D}_c^b(J_1)$.

Un accouplement sur $\mathcal{Q}$. On traduit ci-après l'auto-dualité de B (Proposition 1.2.1.1) pour la dualité de Serre en un accouplement entre $(-1)^*\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}$.

Fixons un isomorphisme α entre B et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_1}}(B, \Omega^1_{X_1/S})$ via l'accouplement antisymétrique sur B. Par exemple, on peut prendre

$$\alpha: \quad B \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_1}}(B, \Omega^1_{X_1/S})$$

donné par $b \in B \mapsto (b, \cdot) \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_1}}(B, \Omega^1_{X_1/S})$. D'après le théorème de dualité de Serre-Grothendieck [18], on a les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\mathcal{H}om(\mathcal{Q}[-1], \mathcal{O}_{J_1}) &\simeq \mathrm{R}\mathcal{H}om(\mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1), \mathcal{O}_{J_1})\\ &\simeq \mathrm{R}pr_{J_1,*}\mathrm{R}\mathcal{H}om(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1, pr_{J_1}^! \mathcal{O}_{J_1})\\ &\simeq \mathrm{R}pr_{J_1,*}(\mathcal{H}om(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1, pr_{X_1}^* \Omega^1_{X_1/S}[1])\\ &\simeq \mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* \mathcal{H}om(B, \Omega^1_{X_1/S}) \otimes \mathcal{P}_1^{-1})[1]\\ &\simeq \mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1^{-1})[1]\\ &\simeq (-1)^*\mathrm{R}pr_{J_1,*}(pr_{X_1}^* B \otimes \mathcal{P}_1)[1]\\ &\simeq (-1_{J_1})^*\mathcal{Q},\end{aligned}$$

où le cinquième isomorphisme est induit par α. Notons $\omega_\Theta = \mathcal{O}_{J_1}(\Theta)|_\Theta$ le faisceau canonique de Θ. On a donc un isomorphisme $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Theta}(\mathcal{Q}, \omega_\Theta) \simeq \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{J_1}}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_{J_1}) \simeq (-1)^*\mathcal{Q}$, et un accouplement de $\mathcal{O}_\Theta$-modules:

$$\phi: \quad (-1_\Theta)^*\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_\Theta} \mathcal{Q} \to \omega_\Theta.$$

Remarque 1.2.4.2 Cet accouplement dépend du choix de l'isomorphisme $\alpha : B \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_1}}(B, \Omega^1_{X_1/S})$. En fait, soit α' l'isomorphisme entre B et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_1}}(B, \Omega^1_{X_1/S})$ donné par $b \in B \mapsto (\cdot, b) \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_1}}(B, \Omega^1_{X_1/S})$. L'accouplement $\phi' : (-1_\Theta)^*\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_\Theta} \mathcal{Q} \to \omega_\Theta$ défini à partir de α', est alors égal à $-\phi$.

1.2.5 Le schéma de "Hilbert" $\mathcal{H}$

Dans ce numéro, supposons que la courbe propre lisse X/S est *projective*, ce qui est automatique lorsque X/S admet une section ou lorsque $g \geq 2$. Fixons un faisceau inversible relativement très ample $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ sur X. Supposons S *connexe*, et notons d' le degré de $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ sur une fibre géométrique. De plus, pour m un entier, rappelons que $J^{[m]}$ est le schéma qui paramètre les faisceaux inversibles de degré m sur X/S, en particulier, $J^{[m]}$ est un torseur sous J.

Définition du schéma $\mathcal{H}$. Soit d un entier, posons $h_d(x) = (p-2)d'x + g - 1 - d \in \mathbf{Z}[x]$. Considérons le foncteur

$$\mathcal{Q}uot^{h_d(x)}_{X_1/S,B} : (\mathbf{Sch}/S) \to \mathfrak{Ens}$$

défini de la manière suivante: soit T un S-schéma, $\mathcal{Q}uot^{h_d(x)}_{X_1/S,B}(T)$ est alors l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux quotients cohérents de $B \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ plat sur T, ayant $h_d(x)$ comme polyn me de Hilbert pour le faisceau relativement très ample $\mathcal{O}_{X_1}(1)$. D'après Grothendieck [16], ce foncteur est représentable par un schéma propre $\mathcal{H}_d = \mathrm{Quot}^{h_d(x)}_{X_1/S,B}$ sur S. Soient $p_1 : X_1 \times_S \mathcal{H}_d \to X_1$, $p_2 : X_1 \times_S \mathcal{H}_d \to \mathcal{H}_d$ les deux projections naturelles. Soient $\mathcal{G}_d$ le faisceau quotient cohérent universel de p_1^*B, $\mathcal{L}_d$ le faisceau défini par la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathcal{L}_d \to p_1^*B \to \mathcal{G}_d \to 0.$$

Comme $\mathcal{G}_d$ est plat sur le schéma $\mathcal{H}_d$, $\mathcal{L}_d$ est plat sur $\mathcal{H}_d$, et sa formation commute aux changements de base $T \to \mathcal{H}_d$. Alors $\mathcal{L}_d$ est un faisceau inversible sur $X_1 \times_S \mathcal{H}_d$, de degré d sur les fibres de $X_1 \times_S \mathcal{H}_d/\mathcal{H}_d$. D'où un morphisme $\alpha_d : \mathcal{H}_d \to J_1^{[-d]}$ défini par $\mathcal{L}_d$. On notera $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, $\alpha = \alpha_0$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ dans la suite.

Remarque 1.2.5.1 Pour $x \in J_1^{[-d]}$ correspondant à un faisceau inversible L de degré $-d$, la fibre $\mathcal{H}_{d,x}$ de $\mathcal{H}_d$ au-dessus de x s'identifie canoniquement à l'espace projectif des droites de $H^0(X_1, B \otimes L) = \mathrm{Hom}(L^{-1}, B)$.

Lien entre $\mathcal{H}$ et le faisceau $\mathcal{Q}$. Rappelons le point de vue fonctoriel introduit par Grothendieck. Soient S un schéma localement noethérien, $\mathcal{G}$ un faisceau cohérent. On peut considérer le foncteur $V_{\mathcal{G}}$ de la catégorie de S-schémas vers la catégories d'ensembles, défini par $S' \in (\mathbf{Sch}/S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{O}_{S'})$. Il est représenté par le S-schéma affine, spectre de l'algèbre symétrique de $\mathcal{G}$. Nous l'appelons le "fibré vectoriel" associé à $\mathcal{G}$, bien que $\mathcal{G}$ ne soit pas nécessairement localement libre.

Rappelons le résultat suivant de Grothendieck.

Proposition 1.2.5.2 (EGA III$_2$ 7.7.6) *Soient S un schéma localement noethérien, $f : X \to S$ un S-schéma propre. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X qui est plat sur S. Considérons le foncteur T de la catégorie de S-schémas Sch/S vers la catégorie des ensembles défini par $T(S') = \Gamma(X \times_S S', \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})$.*

(1) *Ce foncteur T est représentable par un fibré vectoriel $V_{\mathcal{R}}$ associé à un $\mathcal{O}_S$-module cohérent $\mathcal{R}$ sur S.*
(2) *Plus précisément, soit*

$$L^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow L^0 \xrightarrow{u} L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \cdots$$

un complexe parfait de $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini qui calcule universellement $\mathrm{R}f_*\mathcal{F}$, et soit $\check{u} : L^{1,\vee} \to L^{0,\vee}$ le dual de u, alors on peut prendre $\mathcal{R} = \mathrm{coker}(\check{u})$. En particulier, si $f : X \to S$ est une courbe plate et propre, $\mathcal{R} = \mathcal{E}xt^1(\mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{F}), \mathcal{O}_S)$.

On en déduit l'interprétation du fibré projectif (au sens de Grothendieck, [11] EGA II définition 4.1.1) $\mathbf{P}(\mathcal{R})$ associé à $\mathcal{R}$.

Corollaire 1.2.5.3 *Avec les notations précédentes. Le fibré projectif sur S associé (au-sens de Grothendieck) au faisceau cohérent $\mathcal{R}$ représente le foncteur T' : $(\mathbf{Sch}/S) \to \mathfrak{Ens}$, qui associe à un S-schéma S' l'ensemble des classes d'équivalence de couples $(\mathcal{L}', i')$, où (i) $\mathcal{L}'$ est un faisceau inversible sur S', (ii) $i' : f'^*\mathcal{L}' \to \mathcal{F}'$ est universellement injectif (où $f' : X \times_S S' \to S'$ le morphisme naturel); (iii) On dit que $(\mathcal{L}'_1, i'_1)$ et $(\mathcal{L}'_2, i'_2)$ sont équivalents s'il existe un $\mathcal{O}_{S'}$-morphisme $u : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}'_2$ rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} f'^*\mathcal{L}'_1 \arrow[r, "i'_1"] \arrow[d, "f'^*u"'] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \\ f'^*\mathcal{L}'_2 \arrow[ur, "i'_2"'] & \end{tikzcd}.$$

Revenons au schéma $\mathcal{H}$ et supposons que X/S admette une section $\varepsilon \in X(S)$. Appliquons ces considérations avec $S = J_1$, $X = X_1 \times_S J_1$ et $\mathcal{F} = B \times \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est un faisceau de Poincaré sur $X_1 \times_S J_1$, on trouve

Proposition 1.2.5.4 *Gardons les notations ci-dessus. Supposons que X/S admette une section $\varepsilon \in X(S)$.*

(1) *Le foncteur $T \in (\mathbf{Sch}/J_1) \mapsto \Gamma(T \times_{J_1} (X_1 \times_S J_1), B \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{O}_T)$ est représenté par le fibré vectoriel sur J_1 associé au faisceau $\mathcal{R} = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_{J_1}) \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{Q}, \omega_\Theta)$* (§ 1.2.4).
(2) *Le foncteur $\mathcal{H}$, vu comme J_1-foncteur via le morphisme $\alpha : \mathcal{H} \to J_1$, est représentable par le fibré projectif associé à $\mathcal{R}$.*

Corollaire 1.2.5.5 *Le morphisme $\alpha : \mathcal{H} \to J_1$ se factorise à travers Θ.*

Démonstration Par descente étale, on peut supposer que X/S admette une section. On dispose donc du faisceau $\mathcal{Q}$, et $\mathcal{H}$ est le fibré projectif associé à $\mathcal{Q}$. Comme $\mathcal{Q}$ est à support dans Θ, le morphisme $\alpha : \mathcal{H} \to J_1$ se factorise à travers $\Theta \hookrightarrow J_1$. D'où le résultat. □

Remarque 1.2.5.6 Lorsque X/S n'a pas de section, le foncteur $\mathcal{Q}uot^{h_d(x)}_{X_1/S,B}$ est toujours représentable par un J_1-schéma, mais au lieu de trouver un fibré projectif, on trouve un fibré de "Severi-Brauer".

1.2.6 Majoration de la multiplicité des composantes de Θ

Le résultat suivant est bien connu.

Lemme 1.2.6.1 *Soient A une variété abélienne sur un corps k algébriquement clos, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A. Supposons qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathcal{L}^n$ soit algébriquement équivalent à un faisceau inversible $\mathcal{O}_A(\Sigma)$ avec Σ un diviseur effectif ou nul de A, alors $\mathcal{L}$ est lui-même algébriquement équivalent à un faisceau inversible $\mathcal{O}_A(\Sigma')$ avec Σ' effectif ou nul.*

Démonstration Si $\mathcal{L}^n$ est algébriquement équivalent à $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{L}$ l'est aussi. On peut supposer que Σ est un diviseur effectif non nul. Comme $\mathrm{Pic}^\circ_{A/k}$ est n-divisible, quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par un faisceau inversible algébriquement équivalent à $\mathcal{L}$, on peut supposer que $\mathcal{L}^n \simeq \mathcal{O}_A(\Sigma)$. Soit $B = \{x \in A | T_x^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}\}^\circ_{\mathrm{red}}$, qui est une sous-variété abélienne de A. D'après lemme 1 de [23] (et la preuve du Théorème 1 de [23]), on sait que $\mathcal{L}^n|_B \simeq \mathcal{O}_B$. Comme B est une sous-variété abélienne de A, le morphisme $\mathrm{Pic}^{\circ}_{A/k} \to \mathrm{Pic}^{\circ}_{B/k}$ est surjectif. Quitte à tensoriser $\mathcal{L}$ par un faisceau inversible d'ordre n de A, on peut supposer que $\mathcal{L}|_B \simeq \mathcal{O}_B$. Il y a donc un faisceau inversible non dégénéré $\mathcal{M}$ sur $C := A/B$ tel que $\mathcal{L} = \pi^*\mathcal{M}$ (ici, $\pi : A \to C$ est le morphisme canonique). Or $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^n$ ont le même indice ([29] page 159, corollaire), on déduit du Théorème 1 de [23] que $H^i(A, \mathcal{L}) \neq 0$ si et seulement si $H^i(A, \mathcal{L}^n) \neq 0$. En particulier, $H^0(A, \mathcal{L}) \neq 0$. D'où le résultat. □

Proposition 1.2.6.2 *Gardons les notations dans la section précédente. Soit α (resp. β) la classe dans* $\mathrm{NS}(J_1)$ *d'un diviseur effectif non trivial de J_1. Notons* $\mathrm{cl}(\Theta)$ *la classe de Θ dans* $\mathrm{NS}(J_1)$. *Supposons* $\mathrm{cl}(\Theta) = a\alpha + b\beta$ *avec a, b deux entiers positifs. Alors (1) $a \leq p-1$ et $b \leq p-1$; (2) Si $a = p-1$ (resp. si $b = p-1$), alors* $\alpha = \mathrm{cl}(\Theta_{\mathrm{class}})$ *(resp.* $\beta = \mathrm{cl}(\Theta_{\mathrm{class}})$*) et $b = 0$ (resp. $a = 0$), où* $\mathrm{cl}(\Theta_{\mathrm{class}})$ *désigne la classe du diviseur thêta classique* Θ_{class} *dans* $\mathrm{NS}(J_1)$.

Démonstration Supposons $a \geq p$, alors $a - p + 1 \geq 1$. Comme $\mathrm{cl}(\Theta) = (p-1)\cdot \mathrm{cl}(\Theta_{\mathrm{class}})$ dans $\mathrm{NS}(J_1)$, on a

$$(p-1)(\mathrm{cl}(\Theta_{\mathrm{class}}) - \alpha) = (a - p + 1)\alpha + b\beta.$$

Comme $a - p + 1 \geq 1$, $(a-p+1)\alpha + b\beta$ est la classe d'un diviseur effectif non trivial dans $\mathrm{NS}(J_1)$. Donc $\mathrm{cl}(\Theta_{\mathrm{class}}) - \alpha$ peut être représenté par $\mathcal{O}_{J_1}(D)$ avec D un diviseur effectif non trivial de J_1. On en déduit que Θ_{class} est algébriquement équivalent à $D + D'$ avec D et D' deux diviseurs effectifs non triviaux de J_1. Donc un translaté de Θ_{class} s'écirt comme une somme de deux diviseurs effectifs non triviaux. D'où une contradiction avec le fait que la polarisation principale Θ_{class} pour une courbe lisse propre et connexe est irréductible (en fait, il existe un morphisme birationnel $X^{(g-1)} \to \Theta_{\mathrm{class}}$, où $X^{(g-1)}$ désigne le $(g-1)$-ieme produit symétrique de X/k. Par suite, Θ_{class} est intègre, même normal). Ceci montre que $a \leq p-1$. De même, on a $b \leq p-1$. Si on suppose $a = p-1$, le même raisonnement nous montre que $b = 0$, la deuxième assertion s'en déduit. □

Remarque 1.2.6.3 Supposons $p = 3$. Alors on déduit de Proposition 1.2.6.2 que ou bien Θ est réduit, ou bien Θ est le double d'un diviseur thêta classique. On verra plus loin (§ 4.1.2) que pour $g \geq 2$, ce dernier cas est exclu.

1.2.7 "La propriété de Dirac"

Dans cette section, k est un corps de caractéristique $p > 0$.

Généralités. Soit R une k-algèbre locale de longueur finie. Le *socle* de R est le plus grand idéal de A annulé par l'idéal maximal de R. L'algèbre R est de Gorenstein si et seulement si son socle est engendré par un élément ([8] Proposition 21.5).

Soient G un schéma en groupes fini commutatif sur un corps k, et R son algèbre de fonctions. Alors R est une intersection complète, et donc est de Gorenstein ([8] Corollary 21.19). Par exemple, si k est parfait et si G est infinitésimal, il existe des entiers $n_1, \ldots, n_r \geq 1$ tels que $R \simeq k[X_1, \ldots, X_r]/(X_1^{p^{n_1}}, \ldots, X_r^{p^{n_r}})$ ([7] III § 3, n° 6, Corollaire 6.3). Le socle de R est alors l'idéal principal engendré par $\prod_{i=1}^r x_i^{p^{n_i}-1} \in R$, où x_i est l'image de X_i dans R.

Définition 1.2.7.1 ([40], Définition 1.1.1) Une *"fonction de Dirac"* sur G est un élément $\lambda \in R$ tel que (i) l'image de λ dans R_x soit nulle pour $x \in G(k) - \{0\}$ et (ii) λ induit un élément non nul du socle de G à l'origine.

Remarque 1.2.7.2 Si f est une fonction de Dirac sur G, et si k' est une extension de k, posons $G' = G \times_k k'$, alors f est aussi une fonction de Dirac sur G'.

Soit f une telle fonction, elle peut être vue comme un morphisme de schémas $f : G \to \mathbf{A}^1_k$. Alors $Z = V(f) \subset G$ est le plus grand sous-schéma fermé de G où f s'annule. De plus, il est clair que $Z - \{0\} = G - \{0\}$, et si W est un sous-schéma fermé de G tel que $Z \subset W \subset G$, alors ou bien $Z = W$, ou bien $W = G$, c'est-à-dire, Z est un sous-schéma fermé maximal de G distinct de G. De plus, ces deux propriétés caractérisent f a une multiplication par un $k-$scalaire près. Si $G = \mathrm{Spec}(R)$ avec R une k-algèbre finie, on a $\dim_k(R/(f)) = \dim_k(R) - 1$.

Lemme 1.2.7.3 *Soient G un schéma en groupes fini commutatif sur k, f une fonction de Dirac sur G, alors le plus grand sous-schéma en groupes qui laisse invariant f est trivial.*

Démonstration Soit $N = \mathrm{Spec}(R')$ le plus grand sous-schéma en groupes de G qui laisse invariant f. Alors $Z = V(f) \subset G$ est invariant par N. Donc $\dim_k R/(f)$ est un multiple de $\dim_k N$. Or $\dim_k(R/(f)) = \dim_k(R) - 1$, et $\dim_k(R)$ et un multiple de $\dim_k R'$. Ce qui implique que $\dim_k(R') = 1$ sauf dans le cas où $\dim_k(R) = 1$, mais la conclusion est triviale dans ce cas. □

Définition 1.2.7.4 Soit A une variété semi-abélienne sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$. Soit D un diviseur effectif de A. On dit que D satisfait à *la "propriété de Dirac"* si toute équation locale de $D|_{\ker(V)}$ est une fonction de Dirac sur $\ker(V)$, noyau du Verschiebung $V : A \to A_{-1}$ (où A_{-1} est l'image réciproque de A par l'inverse de Frobenius absolu sur $\mathrm{Spec}(k)$).

Proposition 1.2.7.5 *Soient A une variété abélienne sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$, et D un diviseur effectif de A satisfaisant à la propriété de Dirac, alors D est ample.*

Démonstration Soit A' la plus grande sous-variété abélienne de A qui laisse stable D. Il suffit de montrer que A' est triviale. Comme $\ker(V|_{A'})$ laisse stable $D|_{\ker(V)}$, $\ker(V|_{A'})$ est trivial, d'après le Lemme 1.2.7.3. □

Corollaire 1.2.7.6 *Soient A une variété abélienne sur un corps parfait k, D un diviseur effectif de A satisfaisant à la propriété de Dirac. Notons D_0 la somme des composantes de D passant par $0 \in A$. Supposons que D_0 n'est pas trivial. Soit A_0 la plus grande sous-variété laissant stable D_0, alors A_0 est ordinaire.*

Démonstration En fait, $(\ker(V|_{A_0}))^\circ$ est un sous-groupe de $(\ker V)^\circ$ qui laisse stable $D|_{(\ker(V))^\circ} = D_0|_{(\ker(V))^\circ}$, d'après le lemme précédent, on en déduit que $(\ker(V|_{A_0}))^\circ = 0$, c'est-à-dire que $\ker(V|_{A_0})$ est étale, donc A_0 est ordinaire. □

Revenons au diviseur Θ,

Théorème 1.2.7.7 (Propriété de Dirac pour Θ, [40] § 1.1) *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X/k une courbe propre semi-stable. Le diviseur thêta $\Theta \subset J_1$ satisfait a la propriété de Dirac.*

Remarque 1.2.7.8 Rappelons que c'est en quelque sorte cette "propriété de Dirac" qui permet de prouver l'existence de Θ.

Application au cas de genre 1. Pour les courbes elliptiques, on a les résultats suivants dus à Tango:

Théorème 1.2.7.9 ([45] Corollary 8) *Soit E une courbe elliptique sur k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.*

(1) *Si E est ordinaire, on a un isomorphisme $B \simeq \oplus_1^{p-1} \mathcal{L}_i$, où $\{\mathcal{L}_i | 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{\mathcal{O}_{E_1}\} = J_{E_1}[p](k)$.*
(2) *Si E n'est pas ordinaire, $B \simeq F_{p-1}$, où F_{p-1} est le seul fibré semi-stable de rang $p-1$ et de pente 0 de E_1 admettant une section non-triviale (qui est obtenu comme extension successive de $\mathcal{O}_{E_1}$).*

Comme corollaire, on obtient

Corollaire 1.2.7.10 *Soit E/k une courbe elliptique sur k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, alors*

(1) *Si E est ordinaire, Θ est un schéma réduit concentré aux points d'ordre p de $\mathrm{Pic}^0_{E_1/k}$.*
(2) *Si E est supersingulière, Θ est un schéma concentré au seul point $0 \in \mathrm{Pic}^0_{E_1/k}$ avec une multiplicité $p-1$.*

On donne une démonstration directe suivante, en utilisant la propriété de Dirac pour Θ.

Démonstration de 1.2.7.10 On sait que Θ est un diviseur effectif de degré $p-1$. (1) Si E est ordinaire, $\ker(V : E_1 \to E)$ est un schéma en groupes fini étale de degré p. Donc $\Theta = \ker(V) - \{0\}$. (2) Si E est supersingulière, on sait que Θ passe par l'origine. De plus, soit $f \in \mathcal{O}_{J_{E_1},0}$ une fonction locale de Θ en origine $0 \in J_{E_1}$. Sa restriction à $\mathcal{O}_{\ker(V)} \simeq k[t]/(t^p)$ engendre le socle de $k[t]/(t^p)$ (où t est une uniformisante de $\mathcal{O}_{J_{E_1},0}$). Donc $f \equiv t^{p-1} (\mathrm{mod}\ t^p)$. En particulier, Θ est de multiplicité $p-1$ en $0 \in J_{E_1}$. Donc Θ est un schéma à support le seul point $0 \in J_{E_1}$ avec une multiplicité $p-1$. □

Remarque 1.2.7.11 On peut décrire la variation de Θ au voisinage d'un point supersingulier dans l'espace de modules des courbes elliptiques. Soit E une k-courbe elliptique supersingulière, $\mathcal{E}/k[[t]]$ une déformation verselle de E/k sur $k[[t]]$. D'après Igusa ([22] cor. 12.4.4), l'algèbre de Lie de $\mathcal{E}/k[[t]]$ admet une base e telle que $e^{(p)} = te$. Soit $G = \ker(F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_1)$, $G^\vee$ son dual de Cartier, alors $G^\vee$ admet pour équation $x^p - tx = 0$. Et on a une suite exacte

$$0 \to G \to \mathcal{E}[p] \to G^\vee \to 0.$$

Alors $G^\vee \simeq \ker(V) \subset \mathcal{E}_1$ admet pour équation $x^p - tx = 0$. Par suite Θ a pour équation $x^{p-1} - t = 0$.

1.2.8 Un énoncé de pureté

Le résultat suivant est bien connu pour Θ_{class}, et s'étend aux diviseurs thêta de fibrés vectoriels.

Proposition 1.2.8.1 *Considérons X/S une courbe lisse admettant une section $\varepsilon \in X(S)$, avec S un schéma local noethérien régulier de point fermé s. Soit ξ un point générique du fermé W de Θ où Q n'est pas inversible (on renvoie a § 1.2.4 pour la définition de Q). Alors on à*

(1) $\mathrm{Codim}_\xi(W, \Theta) = \dim(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}) \leq 3$;
(2) *Si de plus* $\xi \in \Theta_s$, *et* Θ_s *est géométriquement réduit en* ξ, *on a* $\dim(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}) \geq 1$;
(3) *Si de plus* $\xi \in \Theta_s$, *et* Θ_s *est géométriquement normal en* ξ, *on a* $\dim(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}) \geq 2$.

Démonstration (1) On raisonne par l'absurde. Supposons que $\dim(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}) \geq 4$. Comme S est régulier, $\mathcal{Q}$ est de Cohen-Macaulay (Lemme 1.2.4.1). Donc $\mathrm{prof}_\xi(\mathcal{Q}) \geq 4 \geq 2$. De plus, comme S est régulier, $\mathcal{O}_{\Theta,\xi}$ est un anneau local d'intersection complète de dimension ≥ 4. D'après le théorème d'Auslander-Buchsbaum (SGA 2, Exposé XI, Théorème 3.13(2)), le couple $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}), \xi)$ est parafactoriel. Donc le faisceau inversible $\mathcal{Q}|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\Theta,\xi})-\{\xi\}}$ est trivial. Compte tenu de la propriété de profondeur de $\mathcal{Q}$ en ξ, on en déduit que $\mathcal{Q}$ est inversible en ξ, d'où une contradiction. Montrons (2), supposons que $\dim(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}) < 1$, alors $\dim(\mathcal{O}_{\Theta_s,\xi}) \leq \dim(\mathcal{O}_{\Theta,\xi}) = 0$. Donc ξ est un point générique de Θ_s. Or Θ_s est géométriquement réduit, $\mathcal{Q}_s$ est génériquement inversible sur Θ_s en ξ en vertu du critère de lissité (Lemme 2.2.2, utilisé dans le sens trivial) dans chapitre 2, donc $\mathcal{Q}$ est inversible sur Θ en ξ (1.2.4.1), d'où une contradiction. Un raisonnement similaire nous montre (3). Ceci finit la preuve. □

Proposition 1.2.8.2 *Soit* X/k *une courbe lisse de genre* $g \geq 4$. *Alors* $\mathcal{Q}$ *n'est pas inversible. En particulier,* Θ *est singulier, et le lieu singulier est de codimension* ≤ 3 *dans* Θ.

Démonstration D'après la proposition précédente et le critère de lissité (2.2.2), il suffit de montrer que $W \neq \emptyset$, et il suffit donc de traiter le cas o· X/k est générique. On raisonne par l'absurde. Sinon $\mathcal{Q}$ est inversible sur Θ. Comme $g \geq 4$, le morphisme naturel $\mathrm{Pic}(J_1) \to \mathrm{Pic}(\Theta)$ est un isomorphisme ([13] Exposé XII, Corollaire 3.16). Donc $\mathcal{Q}$ provient d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur J_1. Comme $(-1_\Theta)^*\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \simeq \omega_\Theta$, on obtient que $(-1)^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{J_1}(\Theta)$. Par ailleurs, on a la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \to \mathcal{O}_{J_1} \to \mathcal{O}_\Theta \to 0,$$

d'où la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \to \mathcal{Q} \to 0. \tag{1}$$

Comme X est une courbe générique, le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(J_1) \simeq \mathbf{Z}$ avec la classe du diviseur thêta classique Θ_{class} comme générateur ([27]). Supposons que $\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent a $\mathcal{O}_{J_1}(r \cdot \Theta_{\mathrm{class}})$ pour un entier $r \in \mathbf{Z}$, alors $(-1)^*\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent à $\mathcal{O}_{J_1}(r \cdot \Theta_{\mathrm{class}})$, donc $2r = p - 1$, d'où une contradiction dans le cas où $p = 2$. Supposons désormais $p \geq 3$, alors $r = (p-1)/2$. Donc $(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L})^{-1}$ et $\mathcal{L}$ sont amples. Appliquant la transformation de Fourier-Mukai à la suite exacte (1) ci-dessus, et puisque J_1 est de dimension $g \geq 4$, on obtient une suite exacte:

$$0 = \mathcal{F}^0(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L}) \to \mathcal{F}^0\mathcal{L} \to \mathcal{F}^0\mathcal{Q} \to \mathcal{F}^1(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L}) = 0.$$

En particulier, $\mathcal{F}^0(\mathcal{Q}) \neq 0$. Or par la propriété de la transformation de Fourier-Mukai ([28] Theorem 2.2), $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(\mathcal{Q})[-1] \simeq (-1)^*B[-g]$. Donc $\mathcal{F}(\mathcal{Q}) = (-1)^*B[1-g]$. Puisque $g \geq 4$, $\mathcal{F}^0(\mathcal{Q}) = 0$, d'où une contradiction. □

1.2.9 Les sous-fibrés de B

Cette section est consacrée à l'étude des sous-fibrés de B, en particulier, on donne une nouvelle preuve du fait que B est un fibré vectoriel stable lorsque $g \geq 2$, qui est plus directe que celle de Joshi [21].

Dans cette section, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

La stabilité de B pour $g \geq 2$. L'existence du diviseur thêta entraîne déjà la semi-stabilité du fibré vectoriel B pour une courbe X/k lisse de genre $g \geq 1$. De plus, si le diviseur thêta Θ (pour B) est géométriquement intègre, le fibré B est alors stable. Mais, on ignore si Θ est intègre en toute généralité. K. Joshi a donné une preuve directe de la stabilité de B dans [21]. On donne ci-après une nouvelle preuve, qui fournit aussi une borne naturelle sur la pente des sous-fibrés de B.

Lemme 1.2.9.1 *Soient K un corps de caractéristique p, K' une extension radicielle de degré p. Posons $E = K'/K$, qui est donc un K-espace vectoriel de dimension $p-1$. Soit I le noyau du morphisme $K' \otimes_K K' \to K'$ défini par $a \otimes b \mapsto ab$.*

(1) *L'application K-linéaire composée $\phi : I \to K' \otimes_K K' \to E \otimes_K K'$ est bijective* (*ici, pour $\alpha = a \otimes b \in K' \otimes_K K'$, et $\lambda \in K'$, $\alpha \cdot \lambda := a \otimes \lambda b$*).

(2) *Notons* $\mathrm{Fil}_i = \phi(I^{i+1})$ *pour $i = 0, \ldots, p-1$, les* Fil_i *forment une filtration décroissante de $E \otimes_K K'$:*

$$0 = \mathrm{Fil}_{p-1} \subset \mathrm{Fil}_{p-2} \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_1 \subset \mathrm{Fil}_0 = E \otimes_K K'.$$

Soit $V \subset E$ un K-sous-espace de E de dimension n, alors le morphisme naturel $V \otimes_K K' \to E \otimes_K K' \to (E \otimes_K K')/\mathrm{Fil}_n$ est injectif.

Démonstration (1): Soient $e \in E = K'/K$ un élément non nul de E, $\widetilde{e}$ un relèvement de e dans K'. Considérons $\widetilde{e} \otimes 1 - 1 \otimes \widetilde{e} \in I$, alors $\phi(\widetilde{e} \otimes 1 - 1 \otimes \widetilde{e}) = e \otimes 1$. Donc ϕ est surjectif. Or, vu comme K'-espace vectoriel, I et $E \otimes_K K'$ sont de dimension $p-1$, ce qui implique que le morphisme surjectif ϕ est en fait bijectif.

(2) Clairement, les Fil_i ($1 \leq i \leq p$) forment une filtration décroissante de $E \otimes_K K'$. Il reste a vérifier la deuxième assertion. On raisonne par récurrence sur n. Commençons avec le cas où $n = 1$. Soient $e \in E = K'/K$ un élément non nul, $\tilde{e} \in K'$ un relèvement de e dans K'. Alors il engendre K' comme K-algèbre. Comme $\phi^{-1}(\tilde{e} \otimes 1) = \tilde{e} \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{e}$, il s'agit de montrer $\tilde{e} \notin I^2$. Puisque $\tilde{e}$ est un générateur de K' comme K-algèbre, les éléments $\tilde{e}^i \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{e}^i$ ($1 \leq i \leq p-1$) forment une K' base de I. Si $\tilde{e} \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{e} \in I^2$, ceci implique que $\tilde{e}^i \otimes -1 \otimes \tilde{e}^i \in (\tilde{e} \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{e})(K' \otimes_K K') \subset I^2$. On obtient donc $I^2 = I$, ce qui implique que $I = 0$, d'où une contradiction. Supposons ensuite que l'assertion est vérifiée pour $0 \leq n \leq r$ avec $r \geq 0$ un entier. Soit $\{e_1, \ldots, e_{r+1}\}$ une K-base de E. Soit $\widetilde{e_i}$ un relèvement de e_i dans K'. Comme K' est une extension de degré p, $\widetilde{e_1}$ est un générateur de K' comme K-algébre. Posons $t = \widetilde{e_1}$. Les $\widetilde{e_i}$ pour $i > 1$ peuvent donc s'écrire sous la forme $\widetilde{e_i} = P_i(t)$ avec $P_i(T) \in K[T]$ un polynôme de degré $2 \leq d_i \leq p-1$. Quitte à changer la base $\{e_i\}$ de V, on peut supposer que les d_i sont deux à deux distincts. Soit $e = \sum_{i=1}^{r+1} e_i \lambda_i$ un élément de $E \otimes_K K'$ qui est dans le noyau du morphisme naturel $V \otimes_K K' \to (E \otimes_K K')/\mathrm{Fil}_{r+1}$. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. $\phi^{-1}(e) = \sum_{i=1}^{r+1}(e_i \otimes 1 - 1 \otimes e_i)\lambda_i$ peut donc s'écrire sous la forme suivante:

$$\phi^{-1}(e) = \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{r+2} (a_k \otimes 1 - 1 \otimes a_k) \right) \cdot \mu_j$$

avec des $a_k \in K'$ Soit $\partial : K' \to K'$ la K-dérivation telle que $\partial(t) = 1$. Alors ∂ s'étend par extension des scalaires en une K'-dérivation $\partial \otimes K' : K' \otimes_K K' \to K' \otimes_K K'$. En appliquant $\partial \otimes K'$, on obtient que $(\partial \otimes K')(e) \in I^{r+1}$. D'ailleurs, $(\partial \otimes K')(e) = \lambda_1 + \sum_{i=2}^{r+1} P_i'(t) \otimes \lambda_i$. Donc $\phi((\partial \otimes K')(e)) = \sum_{i=2}^{r+1} \overline{P_i'(t)} \otimes \lambda_i$ (où $\overline{P_i'(t)}$ désigne la réduction de $P_i'(t)$ modulo K). Comme les $P_i'[T]$ sont des polynômes de degré $1 \leq d_i' \leq p-1$, et les d_i' sont deux à deux distincts, les $\overline{P_i'[t]}$ (pour $2 \leq i \leq r+1$) engendrent un K-sous-espace de dimension r. On a donc $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{r+1} = 0$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. Finalement $e_1 \in \mathrm{Fil}_{r+1} \subset \mathrm{Fil}_1$, d'où une contradiction. □

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X une courbe propre lisse connexe sur k. Comme d'habitude, soit X_1 l'image réciproque de X par le Frobenius absolu de $\mathrm{Spec}(k)$, $F : X \to X_1$ le Frobenius relatif. Alors F^*B admet une filtration canonique décroissante. Rappelons la construction donnée dans [38]. Considérons le diagramme cartésien:

$$\begin{tikzcd} X \times_{X_1} X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "F"] \\ X \arrow[r, "F"] & X_1 \end{tikzcd} .$$

L'image réciproque de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \to F_*\mathcal{O}_X \to B \to 0$$

par F donne la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to p_{1,*}(\mathcal{O}_{X\times_{X_1} X}) \to F^*B \to 0.$$

Mais $X \times_{X_1} X$ est le voisinage infinitésimal d'ordre $p-1$ de la diagonale de $X \times_k X$ et $F^*(B)$ est l'idéal augmentation définissant la diagonale X. Par suite, F^*B admet une filtration canonique par des sous-fibrés sur X:

$$0 = B_p \subset B_{p-1} \subset \cdots \subset B_1 \subset B_0 = B,$$

de quotients successifs $B_i/B_{i+1} \simeq \Omega^{\otimes i}_{X_1/k}$. En particulier, si $g \geq 2$, F^*B n'est pas semi-stable.

Théorème 1.2.9.2 *Soit $V \subset B$ un sous-faisceau cohérent de rang r de B. Alors F^*V se plonge dans F^*B/B_r via le morphisme naturel $F^*V \to F^*B \to F^*B/B_r$. Et par suite,* $\deg(V) \leq \frac{r(r+1)(g-1)}{p}$.

Démonstration Comme X est une courbe réduite, et que V est un fibré sur X_1, il suffit de montrer que le morphisme $F^*V \to F^*B/B_n$ est injectif en point générique de X_1, ce qui résulte du lemme précédent. □

Corollaire 1.2.9.3 *Le fibré vectoriel B est stable pour $g \geq 2$.*

Démonstration Soit V un sous-fibré de rang $r \leq p-2$ de B. D'après le théorème ci-dessus, on sait que $\deg(V) \leq \frac{r(r+1)(g-1)}{p}$. Notons $\lambda(V)$ la pente de V. Comme $g \geq 2$, on a $\lambda(V) \leq \frac{(r+1)(g-1)}{p} \leq \frac{(p-1)(g-1)}{p} < g-1$. D'où le résultat. □

Utilisation des puissances symétriques. Soit $L \subset B$ un sous-faisceau inversible de B, on va construire des sous-faisceaux de B de rang supérieur à l'aide de la structure multiplicative de $F_*(\mathcal{O}_X)$. Soit $\pi : F_*(\mathcal{O}_X) \to B$ le morphisme de quotient, et soit $E = \pi^{-1}(L) \subset F_*(\mathcal{O}_X)$, qui est un sous-faisceau de rang 2 de $F_*(\mathcal{O}_X)$ sur X_1. On a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \to E \to L \to 0 \tag{2}$$

où E est un fibré vectoriel de rang 2 sur X_1. Or $F_*(\mathcal{O}_X)$ est un faisceau en algèbres, la structure multiplicative nous donne une flèche $\mathrm{Sym}^i_{\mathcal{O}_{X_1}} E \to F_*(\mathcal{O}_X)$, qui est une injection pour $0 \leq i \leq p-1$. Notons E_i l'image de $\mathrm{Sym}^i_{\mathcal{O}_X} E$ dans $F_*(\mathcal{O}_X)$, qui est donc un sous-faisceau de rang $i+1$. D'où une filtration de $F_*(\mathcal{O}_X)$ par ses sous-faisceaux

$$0 \subset E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{p-1} \subset F_*(\mathcal{O}_X)$$

de quotients successifs $E_i/E_{i-1} \simeq L^{\otimes^i}$ $(0 \leq i \leq p-1)$. Par passage au quotient, on obtient des sous-faisceaux $\mathcal{F}_i := \pi(E_i)$ de B et une filtration

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 (= L) \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} \subset B$$

de quotients successifs $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq L^{\otimes^i}$ $(1 \leq i \leq p-1)$.

Courbes de Tango. On va donner des exemples de courbes qui montrent que la borne donnée ci-dessus pour les degrés des sous-faisceaux de B est la meilleure possible.

Définition 1.2.9.4 Une courbe lisse connexe X/k est dite *de Tango* s'il existe un sous-fibré inversible L de B avec $p \cdot \deg(L) = 2g-2$.

Lemme 1.2.9.5 ([45] lemme 12) *Pour qu'il existe un diviseur D sur X_1 tel que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{X_1}(D)$ soit un sous-faisceau de B, il faut et il suffit qu'il existe $f \in K$ avec* $\mathrm{div}(df) \geq pD$ *et* $df \neq 0$ *(où K est le corps de fonctions de X_1).*

Corollaire 1.2.9.6 *Une courbe X/k est de Tango si et seulement s'il existe un diviseur D sur X_1 et une $f \in K$ avec* $\mathrm{div}(df) = pD$ *et* $df \neq 0$.

Exemple 1.2.9.7 On se place sur un corps k de caractéristique 3. Soit $\mathbf{P} = \mathbf{P}^1_k$ la droite projective et $\mathbf{A} = \mathbf{A}^1_k$ l'ouvert droite affine de coordonnée t. Soit $d > 0$ un entier pair. Considérons un polynôme de degré $3d$ en t, F_{3d}, dont la dérivée F'_{3d} a $3d-2$ racines simples. Par exemple $t^{3d} - t^{3d-1} + t$. Soient a_i les racines simples de F'_{3d}. Soit X la courbe hyperelliptique, d'équation $y^2 = F'_{3d}$. Notons $\pi : X \to \mathbf{P}$ le revêtement double et b_i le point de X au-dessus de a_i. Comme d est pair, $\{b_i\}$ est l'ensemble des points de ramification de π, et X est de genre $(3d-4)/2$. Soit G_d un polynôme en t de degré d, disons à racines simples c_j distinctes des a_i (mais ce n'est pas important). La fonction rationnelle $f := F_{3d}/(G_d)^3$ a pour différentielle df, de diviseur $\sum_i a_i - 3\sum_j c_j$. Calculée sur X, df a pour diviseur $3(\sum_i b_i - \pi^{-1}(\sum_j c_j))$ (rappelons que π n'est pas ramifié au-dessus de $\infty \in \mathbf{P}$). Notons $M := \mathcal{O}_X(\sum_i b_i - \pi^{-1}(\sum_j c_j))$. Alors X est de Tango avec M le faisceau inversible sur X tel que $p \cdot \deg(M) = 2g-2$. On renvoie à [41] pour un autre exemple de courbe de Tango qui utilise le revêtement d'Artin-Schreier de la droite affine.

Remarque 1.2.9.8 Soient X/k une courbe de Tango, L un sous-fibré inversible de B tel que $p \cdot \deg(L) = 2g-2$. En utilisant les puissances symétriques, on voit qu'il existe des sous-faisceaux $\mathcal{F}_i$ $(0 \leq i \leq p-1)$ de B:

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 (= L) \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} \subset B$$

de quotients successifs $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq L^{\otimes^i}$ $(1 \leq i \leq p-1)$, les $\mathcal{F}_i$ sont de rang i et de degré $\deg(\mathcal{F}_i) = \frac{i(i+1)\deg(L)}{2p} = \frac{i(i+1)(g-1)}{p}$.

Utilisation d'un résultat d'Hirschowitz. Rappelons le théorème suivant dû à Hirschowitz.

Théorème 1.2.9.9 (Hirschowitz [19] théorème 4.4) *Soient X/k une courbe lisse connexe de genre $g \geq 2$, F un fibré vectoriel stable générique de pente $g-1$. Alors F contient un sous-faisceau inversible de degré δ dès que $\delta \leq (g-1)/(p-1)$.*

Ceci étant, par déformation et spécialisation, tout fibré vectoriel de pente $g-1$ sur X_1 contient un sous-faisceau inversible de degré δ pour $\delta \leq (g-1)/(p-1)$.

Suivant Tango [45], on note $n(X)$ le degré maximal d'un sous-fibré inversibles de B, on a donc:

Proposition 1.2.9.10 $\frac{g-1}{p-1} \leq n(X) \leq \frac{2g-2}{p}$.

1.3 Questions sur le diviseur thêta

Soit X une courbe propre, lisse, connexe, de genre $g \geq 2$, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On rassemble dans ce § quelques questions qui se posent naturellement dans l'étude géométrique et arithmétique de Θ (aussi [40] § 1.4).

Question 1.3.1 Le diviseur Θ est-il intègre?

A défaut d'être irréductible, on peut se demander:

Question 1.3.2 Le diviseur Θ est-il réduit?

Si Θ n'est pas irréductible, il y a lieu de répartir les composantes irréductibles en deux types:

Définition 1.3.3 Soit Θ_i une composante irréductible de Θ, on dit que Θ_i est *principale*, si $\Theta_i \cap \ker(V) \neq \emptyset$ (où $V : J_1 \to J$ est le Verschiebung de J). Sinon, on dit que Θ_i est *secondaire*.

D'après la propriété de Dirac (§ 1.2.7), on sait que Θ contient des composantes principales.

Question 1.3.4 Le diviseur Θ peut-il avoir des composantes secondaires?

En étudiant les liens entre Θ et le groupe fondamental de X, les questions suivantes se présentent:

Question 1.3.5 Toute composante Θ_i de Θ est-elle ample?

A défaut d'être ample, on peut se demander

Question 1.3.6 Le diviseur Θ peut-il avoir des composantes irréductibles qui sont des translatés de sous-variétés abéliennes de J_1?

On peut aussi s'intéresser à la propriété de Dirac:

Question 1.3.7 Etant donnée une variété abélienne principalement polarisée par une polarisation τ, existe-t-il au plus un diviseur positif algébriquement équivalent a $(p-1)\tau$ qui satisfait à la propriété de Dirac?

Les résultats suivants sont maintenant connus. D'abord, on sait que si $p = 2$, le diviseur Θ est intègre et normal (§ 1.2.2). Supposons $p \geq 3$, alors

- Le diviseur Θ est normal si X est une courbe générale (Théorème 3.2.2 et Théorème 3.2.3), mais pas nécessairement normal si X est spéciale (§ 4.1.3).
- Θ possède au moins une composante principale qui n'est pas un translaté d'une sous-variété abélienne ([40] Prop. 1.2.1).
- Si $p = 3$, le diviseur Θ est réduit (§ 4.1.2), et ne possède pas de composante qui soit le translatés d'une sous-variété abélienne (§ 4.1.3).
- Si $p = 3$ et $g = 2$, Θ est intègre (Théorème 4.3.2.1).
- Si $g = 2$, et X est ordinaire, toute composante de Θ est ample (Corollaire 4.2.3.3).

2 Etude différentielle du diviseur thêta

Dans ce chapitre, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

2.1 Rappel des résultats de Laszlo

Soit X/k une courbe lisse connexe de genre g, E un fibré vectoriel sur X de pente $g - 1$ et de rang r avec $h^0(X, E) \neq 0$. Soit $\mathcal{E}$ une déformation verselle de E sur une base S, en particulier, S est un schéma local essentiellement lisse sur k, d'espace tangent $\left(\mathfrak{m}_s/\mathfrak{m}_s^2\right)^\vee \simeq H^1(X, \mathcal{E}nd(E))$ au point fermé $s \in S$. Par définition, $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur $X \times_k S$ qui relève E. Si E est simple, c'est-à-dire si $H^0(X, \mathcal{E}nd(E)) \simeq k$ (par exemple, si E est un fibré stable sur X), S est donc de dimension $r^2(g-1)+1$. Alors il existe un diviseur positif $\Theta_{\mathrm{univ},E}$ sur S défini comme le diviseur associé au déterminant de $\mathrm{R}f_*(\mathcal{E})$, où $f : X \times_k S \to S$ est le morphisme naturel.

Théorème 2.1.1 (Laszlo[24]) *La multiplicité de $\Theta_{\mathrm{univ},E}$ en s est $h^0(X, E)$.*

Laszlo étudie l'application donnée par le cup-produit

$$H^1(X, \mathcal{E}nd(E)) \otimes_k H^0(X, E) \to H^1(X, E)$$

et montre que pour α général dans $H^1(X, \mathcal{E}nd(E))$, l'application

$$\alpha \cup : \quad H^0(X, E) \to H^1(X, E)$$

est injective donc bijective.

Considérons ensuite $\mathcal{U}(r, g-1)$ l'espace de modules des fibrés vectoriels stables de rang r et de pente $g - 1$. Il existe un changement de base étale $\mathcal{V} \to \mathcal{U}(r, g-1)$, et une certaine "famille de Poincaré" de fibrés vectoriels stables $\mathfrak{E}$ de rang r et de pente $g - 1$ au-dessus de X. Le déterminant de $\mathrm{R}f'_*(\mathfrak{E})$ (où $f' : X \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est le morphisme naturel) définit un diviseur positif sur $\mathcal{V}$ qui ne dépend pas du choix de $\mathfrak{E}$. On obtient donc, par descente étale, le diviseur thêta universel Θ_{univ} sur $\mathcal{U}(r, g-1)$.

Supposons maintenant E stable, et que $h^0(X, E \otimes L) = 0$ pour L inversible de degré 0 général dans la jacobienne J de X. Alors E possède un diviseur thêta Θ_E, qui est un diviseur positif de J défini comme déterminant de $\mathrm{R}pr_{J,*}(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})$ avec $pr_J : X \times_k J \to J$ le morphisme naturel et $\mathcal{P}$ un faisceau de Poincaré sur $X \times_k J$. L'application $L \mapsto E \otimes L$ définit une application de J dans $\mathcal{U}(r, g-1)$, et Θ_E est l'image réciproque du diviseur Θ_{univ} par cette application. Fixons un point x de Θ_E correspondant au faisceau inversible L de degré 0. On a une application naturelle

$$\alpha : \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd(E \otimes L)$$

qui envoie une section locale t de $\mathcal{O}_X$ sur l'homothétie de $E \otimes L$ associée à t. D'où une application

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{E}nd(E \otimes L)).$$

On déduit de 2.1.1 la proposition suivante:

Proposition 2.1.2 (Laszlo)

(1) *On a* $\mathrm{mult}_x(\Theta_E) \geq h^0(X, E \otimes L)$;
(2) *Il y a égalité si et seulement si pour* $a \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$ *assez général, l'application*

$$a\cup : \quad H^0(X, E \otimes L) \to H^1(X, E \otimes L)$$

est bijective;
(3) *Lorsque* Θ_E *est lisse en* x*, l'espace tangent à* Θ_E *en* x *est le noyau de*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}_k(H^0(X, E \otimes L), H^1(X, E \otimes L))$$

défini par $a \in H^1(X, \mathcal{O}_X) \mapsto a\cup \in \mathrm{Hom}_k(H^0(X, E \otimes L), H^1(X, E \otimes L))$.

2.2 Application à B

Désormais dans ce chapitre, X désigne une courbe propre lisse connexe de genre $g \geq 1$ sur k, et X_1 l'image réciproque de X/k par le Frobenius absolu $F : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(k)$. Notons J (resp. J_1) la jacobienne de X/k (resp. de X_1/k), et $\Theta \hookrightarrow J_1$ le diviseur thêta associé au fibré B des formes différentielles localement exactes sur X_1.

Rappelons que l'on a un produit alterné sur B à valeurs dans $\Omega^1_{X_1/k}$:

$$(\cdot,\cdot) : \quad B \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} B \to \Omega^1_{X_1/k}.$$

Pour L un faisceau inversible sur X_1, via l'isomorphisme $H^0(X_1, B \otimes L) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_1}}(L^{-1}, B)$, on a donc un accouplement

$$H^0(X_1, B \otimes L) \otimes_k H^0(X_1, B \otimes L^{-1}) \to H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k}).$$

Par dualité de Serre, on déduit du résultat de Laszlo la proposition suivante:

Proposition 2.2.1 *Soit* $x \in \Theta \subset J_1$ *un point fermé,* L *le faisceau inversible de degré* 0 *sur* X_1 *associé à* x*. Alors*

(1) *On a* $\mathrm{mult}_x(\Theta) \geq h^0(X_1, B \otimes L)$.
(2) *Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que pour* $\alpha : H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k}) \to k$*, forme linéaire assez générale, l'application bilinéaire*

$$H^0(X_1, B \otimes L) \otimes H^0(X_1, B \otimes L^{-1}) \longrightarrow H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k}) \xrightarrow{\alpha} k$$

soit non dégénérée. Cette condition (2) *est automatiquement assurée pour* $p = 2$.

Corollaire 2.2.2 (Le critère de lissité) *Soient* $x \in \Theta$ *un point fermé,* L *le faisceau inversible sur* X_1 *correspondant. Alors* Θ *est lisse en* x *si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées*:

(1) $h^0(X_1, B \otimes L) = 1$ *(et donc aussi* $h^0(X_1, B \otimes L^{-1}) = 1$).
(2) *L'application*

$$H^0(X_1, B \otimes L) \otimes_k H^0(X_1, B \otimes L^{-1}) \to H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k})$$

donnée par $(\cdot, \cdot)$ *est non nulle. Cette condition est automatique pour* $p = 2$.

De plus, si ces conditions sont réalisées, notons ω *un générateur de la droite vectorielle, l'image dans* $H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k})$ *de* $H^0(X_1, B \otimes L) \otimes_k H^0(X_1, B \otimes L^{-1})$*, alors l'espace tangent à* Θ *en* x *est le noyau de l'application linéaire sur* $H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ *définie par* ω.

Remarque 2.2.3 Pour $p \geq 3$ impair, nons avons montré que Θ est totalement symétrique au sens de Mumford (1.2.3.3). Alors Θ est toujours singulier à un point x d'ordre divisant 2 de J_1 dès que $x \in \Theta$. De plus, $\mathrm{mult}_x(\Theta)$ est paire.

2.3 Etude de Θ aux points d'ordre p

Commençons par quelques rappels:

- Soit L un faisceau inversible de degré 0 sur X_1. Alors L se plonge dans $F_*(\mathcal{O}_X)$ si et seulement si $F^*L \simeq \mathcal{O}_X$, et donc si et seulement si L est d'ordre divisant p. On a la suite exacte suivante:

$$0 \to L \to F_*(\mathcal{O}_X \otimes F^*L) \to B \otimes L \to 0.$$

- Réciproquement, soit L inversible sur X_1 d'ordre p, il correspond à un élément non-nul de $H^1(X_1, \mu_p)$, et donc à un torseur de base X_1 sous μ_p, d'algèbre $\mathcal{A} = \oplus_{i=0}^{p-1} L^i$, où la multiplication est donnée par $L^p \simeq \mathcal{O}_{X_1}$. Soient

$$0 \subset E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{p-1} \subset F_*(\mathcal{O}_X)$$

les sous-faisceaux de $F_*(\mathcal{O}_X)$ obtenus à partir des puissances symétriques (§ 1.2.9). Comme L se plonge dans $F_*(\mathcal{O}_X)$, la suite exacte (pour la définition de E, on renvoye à § 1.2.9 (2))

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \to E \to L \to 0$$

est scindée. Par suite, $E_{p-1} \simeq \oplus_{i=1}^{p-1} L^i$. Donc l'algèbre $\mathcal{A}$ est contenue dans $F_*(\mathcal{O}_X)$.
- Rappelons le lien entre faisceau inversible d'ordre p et formes différentielles de Cartier. Soient Y/k une courbe propre lisse connexe, L un faisceau d'ordre p sur Y correspondant à un point x de J_Y, réalisé comme sous-faisceau du faisceau des fonctions méromorphes sur Y, et défini par une section méromorphe (U_α, f_α) (où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de Y). Les $g_{\alpha,\beta} := f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}_Y(U_\alpha \cap U_\beta)^*$ forment un 1-cocycle de $\mathcal{O}_Y^*$. Comme $L^p \simeq \mathcal{O}_Y$, $(g^p_{\alpha,\beta})$ est un 1-cobord, il existe donc des sections locales $u_\alpha \in \mathcal{O}_{X_1}(U_\alpha)^*$ telles que $g^p_{\alpha,\beta} = u_\alpha/u_\beta$ dans $\mathcal{O}_Y(U_\alpha \cap U_\beta)^*$. Donc $f^p_\alpha/u_\alpha = f^p_\beta/u_\beta$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$. Ceci nous donne une section globale non-nulle $(U_\alpha, f^p_\alpha/u_\alpha)$ de L^p. Donc $(U_\alpha, du_\alpha/u_\alpha)$ définit une forme différentielle holomorphe sur Y, que l'on note ω_x. La forme ω_x ne dépend pas du choix de la section méromorphe (U_α, f_α). Cette forme ω_x est *la forme de Cartier associée à* x.
- Pour Y une courbe lisse connexe sur k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, on dispose d'un opérateur de Cartier C_Y sur $H^0(Y, \Omega^1_{Y/k})$ qui est Fr_k^{-1}-linéaire. Le noyau de $C_Y - \mathrm{Id} : H^0(Y, \Omega^1_{Y/k}) \to H^0(Y, \Omega^1_{Y/k})$ est un $\mathbf{F}_p$-espace de dimension d égale au p-rang de Y, et on a $\ker(C_Y - \mathrm{Id}) = \{0\} \cup \{\omega_x | x \in J_Y \text{ d'ordre } p\}$. Les formes

de Cartier sur Y/k engendrent un k-sous-espace vectoriel de $H^0(Y, \Omega^1_{Y/k})$ de dimension d. On renvoie à [42] pour les détails.

Proposition 2.3.1 *Soient L un faisceau d'ordre p sur X_1, ω la forme de Cartier associée à L. On considère $\mathcal{A} = \oplus_{i=0}^{p-1} L^i$ comme sous-faisceau de $F_*(\mathcal{O}_X)$. Soient $\beta : L \hookrightarrow B$ et $\beta' : L^{-1} = L^{p-1} \hookrightarrow B$ les plongements ainsi obtenus. Alors $1 \in \Gamma(X_1, L \otimes L^{-1})$ s'envoie sur $-\omega \in H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k})$ par $(\cdot,\cdot) \circ (\beta \otimes \beta')$.*

Démonstration Soit s un générateur local de L, alors $s^p = f_1 \in \mathcal{O}^*_{X_1}$. Considérons $s^{-1} = s^{p-1}/f_1$, c'est un générateur local de $L^{p-1} \simeq L^{-1}$. Donc $1 = s \otimes s^{-1} \in \mathcal{O}_{X_1} \simeq L \otimes L^{-1}$ s'envoie sur $C(s \cdot d(1/s)) = -ds/s = -\omega$ par $(\cdot,\cdot) : F_*(\mathcal{O}_X) \otimes F_*(\mathcal{O}_X) \to \Omega^1_{X_1/k}$. D'où le résultat. □

Corollaire 2.3.2 *Gardons les notations ci-dessus. Pour que Θ soit lisse en $x \in \Theta$ qui correspond à L d'ordre p, il faut et il suffit que $h^0(X_1, B \otimes L) = 1$. Dans ce cas, l'espace tangent en x à Θ est l'orthogonal de ω_x dans $H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$.*

Application aux composantes irréductibles de Θ. Rappelons qu'une composante D de Θ est dite *principale* si $D \cap \ker(V) \neq \emptyset$, où $V : J_1 \to J$ est le Verschiebung de J.

Lemme 2.3.3 *Soient x, y deux points d'ordre p de J_1 où Θ est lisse. Alors $T_x\Theta$ et $T_y\Theta$ coïncident (vus comme k-sous-espace de $H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$) si et seulement x et y sont colinéaires dans $J_1[p](k)$.*

Démonstration En fait, d'après le corollaire précédent, via les identifications précédentes, on sait que $T_x\Theta$ est le même que $T_y\Theta$ si et seulement si les formes de Cartier ω_x et ω_y sont k-linéairement dépendantes. Donc si et seulement si x et y sont colinéaire dans $J_1[p](k)$ ([42] page 41 Proposition 10). □

Proposition 2.3.4 *Soit D une composante irréductible de Θ, qui contient deux points x, y d'ordre p de J_1, où Θ est lisse. Alors D n'est pas un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1.*

Démonstration Soit A une sous-variété abélienne de J_1 qui laisse D stable. Montrons qu'il n'y a pas de $a \in A(k)$ tel que $x = y + a$. Sinon, l'espace tangent en x et y est le même, ce qui signifie que x et y sont $\mathbf{F}_p$-colinéaires. C'est-à-dire, il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 \leq n \leq p-1$, de sorte que $x = ny$. Donc $a = (n-1)y$. Comme $x \neq y$, on obtient que $n \neq 1$. Et comme y est un point d'ordre p, on obtient que $y \in A$, donc $0 = y - y \in D \subset \Theta$. Par ailleurs, soit f une équation locale de Θ en x, comme Θ est lisse en x, f est aussi une équation locale de D en x, d'après la propriété de Dirac, f est nulle dans l'anneau local de $\ker(V)$ en $x \in \ker(V)$ (avec $V : J_1 \to J$ le Verschiebung de J). Puisque D est stable par A, f est encore une équation locale de D en 0, donc fait partie d'une équation de Θ en 0. Donc cette équation locale de Θ est nulle dans l'anneau local de $\ker V$ en 0. Ce qui contredit à la propriété de Dirac pour Θ. D'où le résultat. □

Proposition 2.3.5 *Soit X/k une courbe lisse connexe ordinaire de genre g. Supposons que pour toute droite affine Δ du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $J_1[p](k) \simeq \mathbf{F}_p^g$ qui ne passe pas par l'origine, Θ soit lisse en au moins deux points de Δ. Alors toute composante principale de Θ est ample.*

Démonstration En fait, soit $\Theta' \subset \Theta$ une composante principale de Θ. Soit A/k la plus grande sous-variété abélienne de J_1 qui laisse stable Θ'. Comme X est ordinaire, Θ ne passe pas par l'origine. Soit $x \in \Theta'$ un point d'ordre p de J_1, alors $x + A[p](k) \subset \Theta'$ contient une droite affine Δ du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $J_1[p](k)$ qui ne passe pas par l'origine. Par hypothèse, Θ est lisse en au moins deux points $a,\ a' \in \Delta \subset \Theta'$. Soit $z \in A(k)$ tel que $a = a' + z$. Alors l'espace tangent à Θ en a est le même que l'espace tangent à Θ en a', donc a et a' sont $\mathbf{F}_p$-colinéaires dans $A[p](k)$ (Lemme 2.3.3), d'où une contradiction. $\square$

De la même façon, on montre:

Proposition 2.3.6 *Soit X/k une courbe ordinaire lisse connexe de genre g. Supposons que pour toute droite affine Δ du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $J_1[p](k) \simeq \mathbf{F}_p^g$, Θ est lisse en au moins deux points de Δ. Alors toute composante principale n'est pas stable par une sous-variété abélienne de p-rang ≥ 1.*

Proposition 2.3.7 *Soit X/k une courbe lisse connexe non-ordinaire. Soit Θ'' la réunion des composantes irréductibles qui passent par l'origine de J_1. Supposons que Θ est lisse en tous les points d'ordre p, alors Θ'' est ample.*

Démonstration Dans le cas où $p = 2$, on sait que Θ est toujours irréductible et ample (§ 1.2.2), donc $\Theta'' = \Theta$ est ample. Supposons maintenant $p \geq 3$. Comme X est non-ordinaire, $\Theta'' \neq \emptyset$. Soit A la plus grande sous-variété abélienne de J_1 qui laisse stable Θ''. D'après la propriété de Dirac (Corollaire 1.2.7.6), A est ordinaire. Si $A \neq 0$, Θ'' contient au moins un point $x \in A(k)$ d'ordre p. Par hypothèse, Θ est lisse en x. A priori, Θ'' est lisse sur x, et donc lisse à l'origine de J_1 puisque A laisse stable Θ''. D'où une contradiction puisque Θ est toujours singulier à l'origine lorsque $p \geq 3$ (Remarque 2.2.3). $\square$

Un exemple où Θ est singulier en un point d'ordre p. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On va construire une courbe ordinaire X/k avec un faisceau L d'ordre p, tel que $H^0(X_1, B \otimes L) \geq 2$, donc Θ n'est pas lisse en L. Comme k est algébriquement clos, le Frobenius absolu $Fr : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(k)$ est un isomorphisme. On peut donc identifier X_1 à X de sorte que F s'identifie au Frobenius absolu $Fr : X \to X$.

Considérons $\mathbf{P}$ la droite projective, $\mathbf{A} \subset \mathbf{P}$ l'ouvert droite affine de coordonnée t. Soit $f(t)$ un polynôme en t de degré n à racines simples. Considérons la courbe projective X définie par l'équation

$$\frac{1}{v^p} - \frac{1}{v} = \frac{1}{f(t)},$$

c'est-à-dire $v^p + f(t)v^{p-1} - f(t) = 0$. Alors le morphisme naturel $\pi : X \to \mathbf{P}$ est fini galoisien de degré p, ramifié au-dessus de t_i $(i \in I)$ avec ramification sauvage minimale. Donc, d'après la formule de Crew-Deuring-Shafarevich (Théorème 3.1 de [3]), X est une courbe ordinaire de genre $g = (n-1)(p-1)$. Soient $x_i \in X$ les points au-dessus de $t_i \in \mathbf{P}$ où π est ramifié. Soit B_X (resp. $B_{\mathbf{P}}$) le faisceau des formes différentielles localement exactes de X (resp. de $\mathbf{P}$). D'abord, on établit une relation entre B_X et $B_{\mathbf{P}}$. Commençons par un calcul local.

Soient $R = k[[t]]$, $R' = k[[t]][v]/(v^p + tv^{p-1} - t) = k[[v]]$. Notons $\phi : R = k[[t]] \to R' = k[[t]][v]/(v^p + tv^{p-1} - t) = k[[v]]$ le morphisme continu naturel de k-algèbres, alors $\phi(t) = v^p/(1 - v^{p-1}) = v^p \sum_{i=0}^{\infty} v^{i(p-1)}$. Soient $F_t : k[[t]] \to k[[t]]$ (resp. $F_v : k[[v]] \to k[[v]]$) le morphisme de Frobenius relatif: c'est un morphisme continu de k-algèbres tel que

$t \mapsto t^p$ (resp. tel que $v \mapsto v^p$). Notons $B_t = \oplus_{i=0}^{p-2} k[[t^p]]t^i$ (resp. $B_v = \oplus_{i=0}^{p-2} k[[v^p]]v^i$), on a un diagramme à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k[[t]] \arrow[r, "F_t"] \arrow[d, "\phi"] & k[[t]] \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "\phi"] & B_t \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & k[[v]] \arrow[r, "F_v"] & F[[v]] \arrow[r, "d/dv"] & B_v \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

d'où un morphisme $\phi' : B_t \to B_v$ rendant le carré de droite commutatif.

Lemme 2.3.8 *Avec les notations ci-dessus, on a $\phi'(B_t) \subset v^p B_v$.*

Démonstration C'est un calcul direct. Par définition, pour $0 \le i \le p-1$,

$$\begin{aligned} \phi'(t^i) = (\phi(t^{i+1})/(i+1))/dv &= d\left(\frac{1}{i+1} \cdot \left(\frac{v^p}{1-v^{p-1}}\right)^{i+1}\right)' \\ &= \frac{(1-v^{p-1})^{p-2-i} v^{p(i+1)} v^{p-2}}{(1-v^{p-1})^p} \subset v^p B_v. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.3.9 *Gardons les notations ci-dessus. Alors le morphisme naturel $\pi^* B_{\mathbf{P}} \to B_X$ est injectif et son image est contenue dans $B_X(-\sum_{i\in I} x_i) \subset B_X$.*

Ecrivons $I = I' \coprod I''$ avec $\sharp I'' = (p-1)\sharp I'$. Soit $L = \mathcal{O}_X(\sum_{i'\in I'}(p-1)x_{i'} - \sum_{i''\in I''} x_{i''})$, alors $L^p = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\sum_{i'\in I'}(p-1)t_{i'} - \sum_{i''\in I''} t_{i''}) \simeq \pi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}} = \mathcal{O}_X$, et on a

$$\begin{aligned} B_X \otimes L &= B_X\left(\sum_{i'\in I'}(p-1)x_{i'} - \sum_{i''\in I''} x_{i''}\right) \\ &\supset \pi_1^* B_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i'\in I'}(p-1)x_{i'} - \sum_{i''\in I''} x_{i''}\right) \\ &= \pi^* B_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i'\in I'} p x_{i'}\right) \\ &= \pi^*\left(B_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i'\in I'} t_{i'}\right)\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, sur la droite projective $B_{\mathbf{P}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^{\oplus^{p-1}}$, donc $L \otimes B_X \supset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(\sharp I' - 1)^{\oplus^{p-1}}$. Donc si $\sharp I' \ge 2$ pour $p \ge 2$ (resp. si $\sharp I' \ge 1$ pour $p \ge 3$), on a $H^0(X, B_X \otimes L) \ge (p-1)(\sharp I') \ge 2$.

2.4 Etude différentielle du schéma $\mathcal{H}$

Rappelons que l'on a noté $\mathcal{H}$ le schéma de Hilbert des sous-faisceaux inversibles de B de degré 0 (pour la définition, voir § 1.2.5). On a une application naturelle $\mathcal{H} \to \Theta$, qui est un "fibré projectif" sur Θ relativement à un certain faisceau cohérent sur Θ (Proposition 1.2.5.4). Si L est un faisceau inversible sur X_1 de degré 0, qui correspond à un point x de Θ. La fibre de $\mathcal{H} \to \Theta$ au-dessus de x est l'espace projectif des droites de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_1}}(L, B) = H^0(X_1, B \otimes L^{-1})$.

Proposition 2.4.1 ([10] corollary 6.4.11) *Soit $\mathcal{L}^{-1}$ un faisceau inversible de degré* 0 *sur* X_1 *qui correspond à un point $x \in \Theta$. Soit $\alpha : \mathcal{L} \hookrightarrow B$ un plongement correspondant à un point z de $\mathcal{H}$ au-dessus de z, et soit $\mathcal{G} = \operatorname{coker}(\alpha)$.*

(1) *L'espace tangent à $\mathcal{H}/k$ en x est canoniquement isomorphe à $H^0(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1})$, l'obstruction à la lissité de $\mathcal{H}$ en z est dans $H^1(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1})$.*
(2) *Posons $d = h^0(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1})$, $r = h^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1})$. Alors $d - r = g - 1$, et*

$$g - 1 = d - r \leq \dim_z(\mathcal{H}) \leq d.$$

Si $\dim_z(\mathcal{H}) = d - r$, $\mathcal{H}$ est une intersection complète en z; si $\dim_z(\mathcal{H}) = d$, $\mathcal{H}$ est lisse en z.

Gardons les notations précédentes, et notons $\overline{\alpha} : \overline{\mathcal{L}} \hookrightarrow B$ le sous-fibré inversible de B engendré par $\alpha : \mathcal{L} \hookrightarrow B$. Soit $\overline{\mathcal{G}} = \operatorname{coker}(\overline{\alpha})$. Notons $\mathcal{L}_\alpha^\perp$ l'orthogonal de $\alpha : \mathcal{L} \hookrightarrow B$ pour $(\cdot, \cdot)$.

Proposition 2.4.2 *Les conditions* (1)–(4) *suivantes sont équivalentes*:

(1) *$\mathcal{H}$ est lisse en z de dimension $g - 1$.*
(2) $H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$
(3) $H^1(X_1, \overline{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$
(4) $\operatorname{Hom}(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{L}_\alpha^\perp) = 0$.

De plus, ces conditions sont entraînées par

(5) $H^1(X_1, \overline{\mathcal{G}} \otimes \bar{\mathcal{L}}^{-1}) = 0$.

Démonstration D'après la proposition précédente, $\mathcal{H}$ est lisse en z de dimension $g - 1$ si et seulement si $H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$, d'où (1)$\Leftrightarrow$(2). Or par définition, $\mathcal{G}$ est une extension de $\overline{\mathcal{G}}$ par son sous-module des torsions $\mathcal{T}$, on a donc $H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1}) \simeq H^1(X_1, \overline{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{L}^{-1})$, d'où (2)$\Leftrightarrow$(3). A partir de la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

on sait que $H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$ si et seulement si le morphisme $\phi_\alpha : H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \to H^1(X_1, B \otimes \mathcal{L}^{-1})$ est surjectif. Or ϕ_α est dual de $\psi_\alpha : \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_1}}(\mathcal{L}^{-1}, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_1}}(\mathcal{O}_{X_1}, \Omega^1_{X_1/k})$ (donné par $< \cdot, \cdot >$ et $\alpha : \mathcal{L} \to B$) par la dualité de Serre. Donc dire que ϕ_α est surjectif équivaut à dire que le morphisme ψ_α est injectif. Autrement dit, on a (3)$\Leftrightarrow$(4). Par définition, on a une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{L} \to \overline{\mathcal{L}} \to \mathcal{T}' \to 0$$

avec $\mathcal{T}'$ un $\mathcal{O}_{X_1}$-module de torsion. On en déduit un morphisme surjectif $H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \bar{\mathcal{L}}^{-1}) \to H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1})$. Donc $H^1(X_1, \overline{\mathcal{G}} \otimes \bar{\mathcal{L}}^{-1}) \simeq H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \bar{\mathcal{L}}^{-1}) = 0$ implique que $H^1(X_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$, d'où (5)$\Rightarrow$(2). Ceci finit la preuve. □

Corollaire 2.4.3 *Soit η un point générique de Θ. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *Θ est lisse en η;*
(2) *Il existe $\alpha : \mathcal{L}_\eta \hookrightarrow B_\eta$ qui est un plongement d'un faisceau inversible de degré* 0 *au-dessus de η, tel que $\operatorname{Hom}(\mathcal{L}_\eta^{-1}, \mathcal{L}_{\eta,\alpha}^\perp) = 0$.*

De plus, sous ces conditions, $\mathcal{H} \to \Theta$ est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage ouvert de η.

Démonstration Clairement, (1) implique (2), et si Θ est lisse en η, $\mathcal{H}$ est isomorphe à Θ sur un voisinage de η. Supposons ensuite qu'il existe un prolongment $\alpha : L_\eta \hookrightarrow B_\eta$ satisfaisant la condition (2), Alors $\mathcal{H}$ est lisse de dimension $g-1$ en le point $\xi \in \mathcal{H}$ correspondant à α. Soit W la composante irréductible (munie de la structure de sous-schéma réduit) de $\mathcal{H}$ passant par ξ, c'est une composante de dimension $g-1$ qui est génériquement lisse sur k. Comme ξ est au-dessus de η qui est un point générique de Θ, on en déduit que $W_\eta = \{\xi\}$. En particulier, pour $z \in \overline{\{\eta\}} \subset \Theta$ assez général, $\dim_{k(z)} \left(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_{\Theta,z}} k(z)\right) = 1$, donc $\mathcal{Q}$ est inversible sur un voisinage de $\eta \in \Theta$. Donc $\mathcal{H}$ est isomorphe a Θ sur un voisinage de η, à priori, Θ est lisse en η. □

3 Etude générique du diviseur thêta

3.1 Préliminaires

3.1.1 Rappels sur l'action de monodromie

Rappels sur les familles de courbes semi-stables. Soient $g \geq 1$ un entier, k un corps algébriquement clos. Notons $\underline{H}_g$ le foncteur de la catégorie de k-schémas vers la catégorie des ensembles défini de la façon suivante: soit T un k-schéma.

- Pour $g \geq 2$, $\underline{H}_g(T)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes stables tricanoniquement plongées de genre g [6].
- Pour $g = 1$, $\underline{H}_1(T)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes E/T propres plates à fibres géométriques intègres de genre arithmétique 1 avec pour singularité au plus un point double ordinaire, munie d'une section $o \in E(T)$ dans le lieu lisse, plongées dans $\mathbf{P}^2$ comme cubique plane par $\mathcal{O}_E(3o)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{P}^2_T \arrow[dl] \\ T & \end{tikzcd} .$$

Théorème 3.1.1.1 (pour $g \geq 2$, [6])

(1) *Pour $g \geq 1$, le foncteur $\underline{H}_g$ est représentable par un schéma H_g irréductible lisse sur k. Soit $\mathcal{X}_g/H_g$ la courbe universelle (pour $g = 1$, on note aussi $\mathcal{E} = \mathcal{X}_1$ la courbe universelle sur H_1).*

(2) *Pour $g \geq 2$, soit $H_{g,\mathrm{sing}}$ le sous-schéma fermé réduit de H_g image du lieu où la courbe universelle $\mathcal{X}_g$ n'est pas lisse sur H_g. Alors $H_{g,\mathrm{sing}}$ est un diviseur à croisements normaux de H_g. Plus précisément, si $t \in H_g$, soit $\mathfrak{O}_t$ un hensélisé strict de l'anneau local de $H_{g,\mathrm{sing}}$ en t. Les branches de $H_{g,\mathrm{sing}}$ passant par t (qui correspondent aux composantes irréductibles de $\mathfrak{O}_t$) sont en bijection avec les points doubles de la fibre $\mathcal{X}_t$ de $\mathcal{X}$.*

Théorème d'Igusa et d'Ekedahl. Pour $g \geq 1$, soit H'_g (resp. $\widetilde{H'_g}$) le lieu des $t \in H_g$ tels que la jacobienne de $\mathcal{X}_{g,t}$ soit une variété abélienne ordinaire sur t (resp. tel que $\mathcal{X}_{g,t}$ soit une courbe lisse ordinaire). Alors H'_g (resp. $\widetilde{H'_g}$) est un ouvert non vide de H_g. Notons $\mathcal{X}'_g = \mathcal{X}_g \times_{H_g} H'_g$, et $\widetilde{\mathcal{X}'_g} = X_g \times_{\mathcal{H}_g} \widetilde{H'_g}$ (pour $g = 1$, on note aussi $\mathcal{E}' = \mathcal{X}'_1$ et $\widetilde{E}' = \widetilde{\mathcal{X}'_1}$), $\mathcal{J}'_g = \mathrm{Pic}^\circ_{\mathcal{X}'_g/H'_g}$ sa jacobienne. $\mathcal{J}'_g$ est un schéma abélien ordinaire sur H'_g de dimension relative g. Soient $\bar{s} \to H'_g$ un point géométrique, $N = p^e N' \geq 1$ un entier (où N' est premier à p). Notons $\mathcal{J}'_g[N]_{et}$ le plus grand quotient étale de $\mathcal{J}'_g[N]]$ sur H'_g, et $\rho_{g,N} : \pi_1(H'_g, \bar{s}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}\left(\left(\mathcal{J}'_g[N]\right)_{et,\bar{s}}\right)$ l'action de monodromie associée (c'est-à-dire, l'action de $\pi_1(H'_g, \bar{s})$ sur la fibre en s de $\mathcal{J}'_g[N]_{et,\bar{s}}$, vu comme faisceau localement constant constructibe sur H'_g).

Théorème 3.1.1.2 (Igusa, Ekedahl [9]) *Supposons $g \geq 1$.*

(1) *Si $N = p^e$ est une puissance de p, le morphisme ρ_{g,p^e} est surjectif.*
(2) *Si $N = N'$ est premier à p, le morphisme $\rho_{g,N'}$ a $\mathbf{Sp}(2g, (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}))$ pour image, où $\mathbf{Sp}(2g, (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}))$ est le groupe symplectique pour l'accouplement de Weil sur $\mathcal{J}'_g[N]$.*

Remarque 3.1.1.3 On renvoie le lecteur à [9] pour une preuve du Théorème 3.1.1.2. Le cas où $g = 1$ et $N = p$ a été d'abord prouvé par Igusa. Le cas où N est premier à p est classique [6].

Remarque 3.1.1.4 (1) Pour $g \geq 2$, soit $\mathcal{X}'_g/H'_g$ la courbe universelle sur H'_g. Alors $\mathcal{X}'_g$ représente le foncteur des courbes semi-stables tricanoniquement plongées de genre g munies d'un point rationnel, dont la jacobienne soit une variété abélienne ordinaire. Comme $\mathcal{X}'_g/H'_g$ est à fibres géométriques connexes, étant donné un point géométrique $\bar{x}$ de $\mathcal{X}'_g$, le morphisme naturel $\pi_1(\mathcal{X}'_g, \bar{x}) \to \pi_1(H'_g, \bar{x})$ est surjectif. Par suite, l'action de monodromie associée à la famille universelle de $\mathcal{X}'_g$ est aussi surjective en vertu du Théorème 3.1.1.2.

(2) Par conséquent, pour $g \geq 2$, il existe une courbe C_g semi-stable définie sur un corps K_1, telle que C_g soit constituée de deux composantes irréductibles: (i) une courbe X' lisse de genre $g-1$ définie sur K_1 munie d'un point rationnel; (ii) une courbe elliptique E sur K_1, qui se coupent en un point rationnel. De plus l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K_1}/K_1)$ sur $J_{C_g}[p](\overline{K_1}) \simeq J_{X'}[p](\overline{K_1}) \times J_E[p](\overline{K_1})$ a $\mathrm{Aut}_{\mathbf{F}_p}(J_{X'}[p](\overline{K_1})) \times \mathrm{Aut}_{\mathbf{F}_p}(J_E[p](\overline{K_1}))$ comme image dans $\mathrm{Aut}_{\mathbf{F}_p}(J_{C_g}[p](\overline{K_1}))$.

3.1.2 Préliminaires sur les points doubles ordinaires

Dans ce §, nous rappelons la notion de point double ordinaire (en codimension 1) et leur déformation.

Définition 3.1.2.1 (point double ordinaire) Soient F un corps, X/F un schéma localement de type fini. Un point singulier $x \in X$ de codimension 1 est *un point double ordinaire* s'il existe un F-schéma lisse $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et un diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & & U \arrow[ll, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\
\mathrm{Spec}(F) & Y \arrow[l] & \mathrm{Spec}(A[u,v]/(uv)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dans lequel α et β sont des morphismes étales, et $x \in \alpha(U) \subset X$.

Soit R un anneau de valuation discrète, de corps résiduel k et de corps de fractions K. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R, $\varpi \in \mathfrak{m}$ une uniformisante de R. Par convention, on note $\varpi^\infty = 0 \in R$.

Notation 3.1.2.2 Pour $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$, notons $C_n = \mathrm{Spec}(R[u, v]/(uv - \varpi^n))$.

Remarque 3.1.2.3 Pour $n \geq 1$ et $n \neq \infty$, C_n est un schéma normal, tandis que C_∞ a deux composantes irréductibles qui se coupent transversalement le long de $u = v = 0$.

Notons $S = \mathrm{Spec}(R)$, η (resp. s) le point générique (resp. le point fermé) de S.

Proposition 3.1.2.4 (déformation des points doubles ordinaires) *Soient X/S un S-schéma plat, $x \in X_s$ un point ordinaire double.*

(1) *Il existe alors un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$, un S-schéma lisse Y, et un diagramme commutatif*:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & Z \arrow[l, "\alpha'"'] \arrow[d, "\beta'"] \\ S & Y \times_S C_n \arrow[l] \end{tikzcd}$$

avec α' et β' des morphismes étales tels que $x \in \alpha'(Z)$.

(2) *Si $n \neq \infty$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X qui est normal et tel que U_η soit lisse sur η.*

(2)' (*Cas équisingulier*) *Si $n = \infty$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X dont le normalisé $\widetilde{U}$ est lisse sur S et a pour fibre spéciale le normalisé de U_s.*

Démonstration Vu la définition d'un point double ordinaire (3.1.2.1), le corps résiduel $k(x)$ en $x \in X$ est une extension séparable de $k(s) = k$, donc une extension finie étale d'une extension transcendante pure $k[t_1, \ldots, t_n]$ de k. Quitte à restreindre à un voisinage ouvert de x dans X, on peut supposer que les t_i se relèvent en des fonctions T_i sur X. Considérons le morphisme $\phi : X \to \mathrm{Spec}(R[t_1, \ldots, t_n]) = \mathbf{A}^n_S$ défini par les T_i, et soit $\xi \in \mathbf{A}^n_S$ le point générique de la fibre spéciale de $\mathbf{A}^n_S$. Alors $\xi = \phi(x)$ et chaque composante irréductible de X domine $\mathbf{A}^n_S$ par ϕ. Soit R' l'anneau local de $\mathbf{A}^n_S$ en ξ. Donc R' est un anneau de valuation discrète. Soit $X' = X \times_{\mathbf{A}^n_S} \mathrm{Spec}(R')$. Alors X' est maintenant une R'-courbe plate qui présente un point double ordinaire en x. Quitte à faire une localisation étale $Y \to \mathbf{A}^n_S$ avec ξ' un point au-dessus de ξ, on peut remplacer $\mathbf{A}^n_S$ par un S-schéma lisse Y de R' tel que l'extension $k(\xi') \to k(x)$ soit triviale. On est donc ramené au cas d'une courbe relative, un cas qui est bien connu. On renvoie à [5](§ 2.23) pour les détails. Les autres assertions sont immédiates. □

3.2 Théorème d'irréductibilité et de normalité

Dans cette section, k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Si Y est un schéma, et $y \in Y$, on note $k(y)$ le corps résiduel de Y en y.

Lemme 3.2.1 *Soit $g \geq 2$ un entier. Il existe un k-schéma $S = \mathrm{Spec}(R) = \{\eta, s\}$ spectre d'un anneau de valuation discrète complet et une courbe semi-stable X/S de genre g telle que*

(1) *La fibre générique X_η de X/S est lisse.*
(2) *La jacobienne J_1 de X_1 est propre sur S.*
(3) *La fibre spéciale X_s est constituée de deux composantes: (i) une courbe générique Y de genre $g-1$, et (ii) une courbe elliptique générique E qui se coupent transversalement en un point rationnel. De plus, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k(s)}/k(s))$ sur les points d'ordre p de $J_{1,s} \simeq J_{Y,1} \times E_1$ a pour image $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(J_{Y,1}[p](\bar{s})) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.*

Démonstration On a $g \geq 2$. Reprenons la courbe C_g/h au-dessus de $h = \mathrm{Spec}(K_1)$ construite dans la Remarque 3.1.1.4. Choisissons un plongement tricanonique de C_g/h, ce qui définit un morphisme de h dans H'_g. Soit h' son image. En h', $H'_{g,\mathrm{sing}}$ est un diviseur lisse de H'_g (Théorème 3.1.1.1). Soit s le point générique de ce diviseur. On prend R le complété de l'anneau local de H'_g en s. Alors R est un anneau de valuation discrète complet. Posons $S = \mathrm{Spec}(R) = \{\eta, s\}$, $X = \mathcal{X}'_g \times_{H'_g} S$. Ainsi X/S est une courbe stable de fibre générique la courbe générique de genre g, et sa jacobienne est un schéma abélien sur S. De plus, X_s est constituée de deux composantes: (i) une courbe générique Y de genre $g-1$, et (ii) une courbe elliptique générique E. Ces deux composantes se coupent transversalement en un point rationnel. Il reste à vérifier les conditions sur l'action de monodromie. Par construction (Remarque 3.1.1.4), le morphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k(h)}/k(h)) \to \mathrm{Aut}\left(J_{C_g,1}[p](\overline{k(h)})\right)$ a $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(J_{Y,1}[p](\bar{h})) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ comme image. Soit $U \subset H'_g$ le lieu lisse du diviseur passant par $h' \in H'_g$, alors $h' \in U$. Considérons le diagramme commutative suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\overline{k(h)}/k(h)) = \pi_1(h,\bar{h}) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(U,\bar{h}) \arrow[d, "\rho'"] \\
& \mathrm{Aut}\left(J_{C_g,1}[p](\overline{k(h)})\right)
\end{tikzcd},$$

on en déduit que $\mathrm{Aut}(J_{Y,1}[p](\bar{h})) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \subset \mathrm{im}(\rho')$. Or X_h est une courbe stable sur $k(h)$ constituée de deux composantes lisses se coupant transversalement en un point rationnel, on a $\mathrm{Aut}(J_Y[p](\bar{h})) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \supset \mathrm{im}(\rho')$. Donc ρ' a $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(J_{Y,1}[p](\bar{h})) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ comme image. Puisque $s \in U$ est le point générique, par généralisation de h' à s, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k(s)}/k(s))$ sur les points d'ordre p de $J_{1,s} \simeq J_{Y,1} \times E_1$ a pour image $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(J_{Y,1}[p](\bar{s})) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. $\square$

Théorème 3.2.2 *Si $g = 2$, le diviseur Θ_{gen} de la courbe générique est lisse, et donc géométriquement irréductible.*

Démonstration Considérons la courbe X/S construite dans le lemme précédent. Soit $k'/k(s)$ une extension finie galoisienne de $k(s)$ de groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ qui déploie les points d'ordre p de $J_{1,s}$. Comme S est complet donc hensélien, l'extension $k'/k(s)$ s'étend en un revêtement étale galoisien S'/S de groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Soient $(b_i)_{i=1,\ldots,p-1}$ et $(b'_i)_{i=1,\ldots,p-1}$ les points d'ordre p de E_1 et E'_1. Sur s', le diviseur $\Theta_{s'}$ est tel que (Remarque 1.1.2.1)

$$\Theta_{s'} = \Theta_s \times_{k(s)} k(s') = \bigcup_{i=1,j=1}^{p-1} \left(\left(\{b_i\} \times E'_1\right) \cup \left(E_1 \times \{b'_j\}\right) \right).$$

C'est une courbe semi-stable de points doubles $(b_i, b'_j)_{i,j\in\{1,\ldots,p-1\}}$ qui sont conjugués sous G. En particulier, $\Theta_{s'}$ a seulement des points doubles ordinaires pour singularités.

Soit $a \in \Theta_{s'}$ un point singulier, a est donc un point double ordinaire de $\Theta_{s'}$. D'après la déformation de points doubles ordinaires (Proposition 3.1.2.4), il y a deux cas à distinguer:

(1) Ou bien il existe un voisinage ouvert U de a dans $\Theta' := \Theta \times_S S'$ tel que U'_η soit lisse sur η', auquel cas $\Theta'_{\eta'}$ et donc Θ_η sont lisses.

(2) Ou bien, Θ' est équisingulier en a sur S', auquel cas le normalisé $\widetilde{\Theta}'$ de Θ' est lisse sur S' et la fibre spéciale $\widetilde{\Theta}'_{s'}$ est le normalisé de $\Theta'_{s'}$. Alors $\widetilde{\Theta}'_{s'}$ est une somme disjointe

de courbes irréductibles isomorphes à E_1 ou E_1'. Par suite, les composantes de $\widetilde{\Theta'}_{\eta'}$ (où η' est le point générique de S') sont des courbes elliptiques. Or J_1 ne contient pas de courbes elliptiques puisque $\mathrm{NS}(J_{1,\eta} \times_\eta \bar{\eta}) = \mathbf{Z}$ [27], d'où une contradiction. □

Théorème 3.2.3 *Si $g \geq 3$, le diviseur Θ_{gen} de la courbe générique est géométriquement normal.*

Démonstration On raisonne par récurrence sur g. D'après le théorème précédent, on sait que le diviseur thêta pour la courbe générique de genre 2 est lisse. Supposons maintenant $g \geq 3$ et que le théorème a été démontré pour les courbes génériques de genre $\leq g-1$. Considérons la courbe X/S construite dans le Lemme 3.2.1. Soit $K'/k(\eta)$ une extension galoisienne de corps telle que les conditions suivantes soient réalisée: notons $S' = \{\eta', s'\}$ le normalisé de S dans K', alors (i) toutes les composantes irréductibles de $\Theta_{\eta'}$ sont géométriquement irréductibles; (ii) l'extension de corps $k(s')/k(s)$ déploie les points d'ordre p de J_s. Notons $(b_i)_{i=1,\ldots,p-1}$ les points d'ordre p de $E_{1,s'}$.

Montrons d'abord que $\Theta_{\eta'}$ est géométriquement intègre. D'après la Remarque 1.1.2.1, la fibre de Θ au-dessus de s' est telle que

$$\Theta_{s'} = \Theta_{Y_s} \times E_{1,s'} \cup \left(\cup_{i=1}^{p-1} \left(J_{Y_1,s'} \times \{b_i\}\right)\right),$$

où $\Theta_{Y_{s'}}$ est le diviseur thêta de la courbe générique de genre $g-1$, et donc est normal. Par conséquent, Θ à une fibre spéciale géométriquement réduite. Il reste à prouver que $\Theta_{\eta'}$ est géométriquement irréductible. Soit $\Theta_{\eta',i}$ $(i \in I)$ les composantes irréductibles de $\Theta_{\eta'}$, munies de la structure de sous-schéma fermé réduit. Comme $\mathrm{NS}(J_{1,\eta'}) \simeq \mathbf{Z}$, elles sont amples. Soit $\overline{\Theta_{\eta',i}}$ l'adhérence schématique de $\Theta_{\eta',i}$ dans $\Theta' := \Theta \times_S S'$ (= le diviseur thêta pour la courbe X'/S'). Alors $\overline{\Theta_{\eta',i}}$ a une fibre spéciale ample. Or d'après la description explicite de $\Theta_{s'}$ donnée ci-dessus, on a donc $\Theta_Y \times E_1 \subset (\overline{\Theta_i})_s$. Or par l'hypothèse de récurrence, $\Theta_{s'}$ est réduit, ce qui implique que $\mathrm{card}(I) = 1$. Donc $\Theta_{\eta'}$ est géométriquement irréductible.

Ensuite, on montre que $\Theta_{\eta'}$ est géométriquement normal. Soit Z le fermé de $\Theta_{s'}$ où $\Theta_{s'}$ n'est pas lisse. Par hypothèse de récurrence, Θ_Y est normal, donc les composantes de Z de codimension 1 dans $\Theta_{s'}$ sont les $\Theta_Y \times \{b_i\}$ $(1 \leq i \leq p-1)$. Soit ξ_i le point générique de $\Theta_Y \times \{b_i\}$. Comme les b_i $(1 \leq i \leq p-1)$ sont conjugués sous le groupe de décomposition de $k(\eta')/k(\eta)$, les ξ_i le sont aussi. En ξ_i, $\Theta_{s'}$ présente un point double ordinaire de codimension 1. Soit $\pi : \widetilde{\Theta}' \to \Theta'$ la normalisation. Il y a deux cas à distinguer:

(1) Θ' est normal en chacun des ξ_i, auquel cas, Θ' est normal, et en particulier, $\Theta_{\eta'} = \Theta'_{\eta'}$ est normal. De plus, $\Theta_{\eta'}$ est en fait lisse en codimension ≤ 1 (Lemme 3.1.2.4 (2)), donc est géométriquement normal en vertu du critère de normalité de Serre.

(2) Il existe un point ξ_{i_0} où Θ' est équisingulier (au sens de Lemme 3.1.2.4 (2')). Par l'action de monodromie, Θ' est équisingulier en tous les ξ_i. Alors $\widetilde{\Theta}'$ est lisse sur S' au-dessus d'un voisinage ouvert V_i de ξ_i, et la fibre spéciale $\widetilde{\Theta}_{s'}$ de $\widetilde{\Theta}'$ est la normalisé de $\Theta_{s'}$ au-dessus de $V_{s'}$ (d'après la Proposition 3.1.2.4).

Lemme 3.2.4 *Il existe un fermé $\widetilde{W}$ de $\widetilde{\Theta}_{s'}$ de codimension ≥ 2 dans $\widetilde{\Theta}_{s'}$ tel que $\widetilde{\Theta}_{s'} - \widetilde{W}$ ait au moins 2 composantes connexes.*

Démonstration du lemme Soit $W = Z - (\cup_{i=1}^{p-1} V_i)$, $\widetilde{W} = \pi_{s'}^{-1}(W) \subset \widetilde{\Theta}$. Alors $\widetilde{W}$ est de codimension ≥ 2 dans $\Theta_{s'}$. De plus, $\widetilde{\Theta}_{s'} - \widetilde{W}$ est le normalisé de $\Theta_{s'} - W$, et il est aussi lisse en les points au-dessus de ξ_i $(1 \leq i \leq p-1)$. Par conséquent, $\widetilde{\Theta}_{s'} - \widetilde{W}$ n'est pas connexe (en effet, $\widetilde{\Theta}_{s'} - \widetilde{W}$ a p composantes connexes). □

On termine la preuve par la proposition ci-après que l'on applique a $Z = \widetilde{\Theta}'$ et $F = \widetilde{W}$. On voit que comme $\widetilde{\Theta}_{s'} - \widetilde{W}$ n'est pas connexe par le lemme ci-dessus, $\widetilde{\Theta}_{\eta'}$ n'est pas connexe. Or $\Theta_{\eta'}$ est géométriquement intègre d'après ce que l'on a montré au début de la preuve, $\widetilde{\Theta}_{\eta'}$ l'est aussi, d'où une contradiction. Ceci finit la preuve. □

Proposition 3.2.5 (Utilisation de SGA2) *Soit $S = \operatorname{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, de point fermé s, de point générique η et d'uniformisante ϖ. Soit $f : Z \to S$ un schéma propre et plat à fibre générique équidimensionnelle de dimension ≥ 2. On suppose que Z est normal. Soit F un fermé de Z_s tel que* $\operatorname{Codim}(F, Z_s) \geq 2$, *et soit $V = Z - F$. Notons $\widehat{V}$ le complété formel de V le long de V_s, alors*

(1) *L'application canonique $H^0(V, \mathcal{O}_V) \to H^0(\widehat{V}, \mathcal{O}_{\widehat{V}})$ est bijective.*
(2) *$Z_\eta = V_\eta$ est connexe si et seulement si V_s est connexe.*

Démonstration L'assertion (2) est une conséquence immédiate de (1) et du fait que les composantes connexes de $\widehat{V}$ sont celles de V_s. Prouvons (1) comme cas particulier de SGA2 IX corollaire 1.2. Notons $j : V \to Z$ l'immersion ouverte, montrons d'abord que les faisceaux $(f \circ j)_*(\mathcal{O}_V)$ et $\mathrm{R}^1(f \circ j)_*(\mathcal{O}_V)$ sont des faisceaux cohérents sur Z comme conséquence de SGA2 VIII, théorème 3.1. En effet, pour tout $x \in V$ tel que $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap (X - V), \overline{\{x\}}) = 1$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,s}) \geq 2$. Comme V est normal, $\operatorname{prof}_x(\mathcal{O}_V) \geq 2$. Appliquons SGA2 VIII théorème 3.1 à la situation où $X = Z$, $Y = S$, $U = V$, $F = \mathcal{O}_V$ et $n = 2$, on trouve que les faisceaux $(f \circ j)_*(\mathcal{O}_V)$ et $\mathrm{R}^1(f \circ j)_*(\mathcal{O}_U)$ sont des faisceaux cohérents sur Z. Par SGA2 IX corollaire 1.2, on en conclut que l'application canonique

$$H^0(V, \mathcal{O}_V) \to \varprojlim H^0(V_n, \mathcal{O}_{V_n}) = H^0(\widehat{V}, \mathcal{O}_{\widehat{V}})$$

est bijective (où $V_n = V \otimes_R R/\varpi^{n+1}$). D'où le résultat. □

Remarque 3.2.6 En utilisant le même genre de dégénérescence, on peut majorer les multiplicités du Θ_{gen}. En effet, si $g = 2n$ (resp. $g = 2n + 1$), on dégénère la courbe générique en une chaîne de n courbes génériques de genre 2 (resp. en une chaîne de n courbes génériques de genre 2 et une courbe elliptique), on en déduit que en un point de Θ_{gen}, la multiplicité est $\leq n$ (resp. $\leq n + 1$). D'où le corollaire suivant:

Corollaire 3.2.7 *Pour une courbe générique de genre $g = 2n$ (resp. de genre $g = 2n+1$), et tout L inversible de degré* 0 *sur X_1, on a $h^0(X_1, B \otimes L) \leq n$ (resp. $h^0(X_1, B \otimes L) \leq n+1$).*

3.3 Compléments

3.3.1 Une propriété de $\mathcal{Q}$

Proposition 3.3.1.1 *Pour une courbe X générique de genre $g \geq 2$, le faisceau $\mathcal{Q}$* (§ 1.2.4) *ne provient pas d'un faisceau inversible sur J_1.*

Démonstration C'est clair pour $g \geq 4$ car $\mathcal{Q}$ n'est pas inversible (proposition 1.2.8.2). Supposons $g = 2$ ou 3 et que $\mathcal{Q}$ soit inversible sur Θ si $g = 3$ (rappelons que c'est automatique si $g = 2$ puisque Θ_{gen} est lisse). On raisonne par l'absurde. Supposons que $\mathcal{Q}$ provienne d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur J_1. Comme $\mathrm{NS}(J_1) \simeq \mathbf{Z}$ avec Θ_{class} comme générateur ([27]), il existe $r \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent à $\mathcal{O}_{J_1}(r\Theta_{\mathrm{class}})$. On a aussi $(-1)^*\mathcal{L} \equiv \mathcal{O}_{J_1}(r\Theta_{\mathrm{class}})$. Comme $(-1_\Theta)^*\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \simeq \omega_\Theta = \mathcal{O}_{J_1}(\Theta)|_\Theta$ (§ 1.2.4), $\mathcal{O}_{J_1}(2r\Theta_{\mathrm{class}})$ et $\mathcal{O}_{J_1}((p-1)\Theta_{\mathrm{class}})$ ont des restrictions à Θ, qui sont algébriquement équivalentes. On en déduit que $2r = p - 1$ (car Θ_{class} est ample), ce qui n'est impossible que pour $p \geq 3$. Supposons $p \geq 3$, on trouve que $r = (p-1)/2$. On en déduit que $\mathcal{L}$ et $\left(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L}\right)^{-1}$ sont amples sur J_1. Considérons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

et appliquons lui la transformation de Fourier-Mukai (inverse), on obtient la suite exacte suivante

$$0 = \mathcal{F}^0(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L}) \to \mathcal{F}^0(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}) \to \mathcal{F}^1(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta) \otimes \mathcal{L}).$$

Comme $(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta)\otimes\mathcal{L})^{-1}$ est ample, et J_1 est de dimension $g \geq 2$, on sait que $\mathcal{F}^1(\mathcal{O}_{J_1}(-\Theta)\otimes \mathcal{L}) = 0$. Donc $\mathcal{F}^0(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}) \neq 0$. Or $\mathcal{F}(\mathcal{Q}) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(B)[1] = (-1)^* B[1-g]$ ([28]), on en déduit que $\mathcal{F}^0(\mathcal{Q}) = 0$, d'où une contradiction. □

3.3.2 Etude des points de torsion de Θ_{gen}

D'après 1.2.7.7, le diviseur Θ satisfait à la propriété de Dirac, a fortiori, Θ contient tous les points d'ordre p de $J_1(k)$. Pour une courbe générique, on a le résultat suivant:

Proposition 3.3.2.1 *Le diviseur Θ_{gen} de la courbe générique de genre $g \geq 1$ contient comme seuls points d'ordre fini les points d'ordre p de J_1. De plus, Θ_{gen} est lisse en ces points.*

Démonstration Dans le cas où $g = 1$, le résultat est clair. Supposons maintenant que $g \geq 2$. Soit η le point générique de l'espace de modules des courbes de genre g. Soit $x \in \Theta(\bar{\eta})$ un point d'ordre fini égal à $N = p^e M$ avec e, M des entier tels que $e \geq 0$, $M \geq 1$, $(e, M) = 1$. Fixons un isomorphisme $J_{\eta,1}[N](\bar{\eta}) \simeq J_{\eta,1}[p^e](\bar{\eta}) \times J_{\eta,1}[M](\bar{\eta})$ donné par $x \in J_{\eta,1}[N](\bar{\eta}) \mapsto (x_p, x_M) \in J_{\eta,1}[p^e](\bar{\eta}) \times J_{\eta,1}[M](\bar{\eta})$. D'après le Théorème 3.1.1.2, $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ agit transitivement sur les points d'ordre M (resp. sur les points d'ordre p^e), donc tout point d'ordre M (resp. d'ordre p^e) apparaet comme la composante M-primaire (resp. p-primaire) d'un certain point d'ordre N contenu dans $\Theta_\eta = \Theta_{\text{gen}}$. Or on peut trouver X/S une courbe semi-stable telle que X_η soit générique, et que X_s soit une chaîne de g courbes elliptiques ordinaires. x se spécialise en un point d'ordre exactement N de $J_{1,s}$. Si $M \neq 1$, par conjugaison des points d'ordre M, on peut supposer que la spécialisation $(y_1, \ldots, y_g) \in E_{1,1} \times \cdots \times E_{1,g} \simeq J_{1,s}$ de x est telle que chacun des y_i $(i = 1, \ldots, g)$ ait sa composante M-primaire d'ordre exactement M. Par ailleurs, par la description de Θ_s (Remarque 1.1.2.1), les seuls points d'ordre fini sont les points $(y_1, \ldots, y_g) \in E_{1,1} \times \ldots \times E_{1,g} \simeq J_{1,s}$ dont au moins un des y_i est exactement d'ordre p. D'où une contradiction. Donc $M = 1$ et $N = p^e$ est une puissance de p. Si $e \geq 2$, de la même façon, par conjugaison des points d'ordre $N = p^e$, on peut supposer que la spécialisation $(y_1, \ldots, y_g) \in E_{1,1} \times \cdots \times E_{1,g}$ de x est telle que chacun des y_i $(i = 1, \ldots, g)$ soit d'ordre exactement p^e, ce qui contredit la description explicite des points d'ordre fini de Θ_s (Remarque 1.1.2.1). Par conséquent, on a $N = p$.

Pour la lissité de Θ_η en les points d'ordre p, il suffit de remarquer que Θ_s contient au moins un point y d'ordre p où Θ_s est lisse. Soit $x \in \Theta_\eta$ le point d'ordre p qui se spécialise en $y \in \Theta_s$, alors Θ_η est lisse en y, et donc lisse en tous les points d'ordre p par l'action de monodromie. □

4 Cas où $g = 2$ ou $p = 3$

On donne des résultats sur le diviseur thêta Θ dans le cas où $g = 2$ ou $p = 3$.

4.1 Diviseur thêta en caractéristique 3

Dans cette section, k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p = 3$, X/k est une courbe propre lisse connexe sur k. Notons B le fibré des formes différentielles localement exactes sur X_1, et $\Theta = \Theta_B$ le diviseur thêta associé à B. Comme $p = 3$, B est un fibré vectoriel de rang 2 sur X_1.

4.1.1 Préliminaires

Quelques rappels. Soit x un point de Θ, notons L le faisceau inversible de degré 0 sur X_1 correspondant. D'après le critère de lissité, pour que x soit un point singulier de Θ, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée:

- soit $h^0(X_1, B \otimes L) \geq 2$,
- soit $h^0(X_1, B \otimes L) = 1$ (donc on a aussi $h^0(X_1, B \otimes L^{-1}) = 1$). Et si l'on note $\tau : L^{-1} \hookrightarrow B$ et $\tau' : L \hookrightarrow B$ les uniques (à une multiplication par un scalaire près) plongements de L^{-1} dans B et de L dans B, on a en plus que L et L^{-1} sont orthogonaux par rapport à l'accouplement antisymétrique $(\cdot, \cdot) : B \otimes B \to \Omega^1_{X_1/k}$ sur B (2.2.2).

En général, soit $\tau : L^{-1} \hookrightarrow B$ un plongement de L^{-1} dans B, qui correspond à un élément non-nul de $H^0(X_1, B \otimes L)$. Soit M_τ le sous-fibré en droites de B contenant $\tau(L^{-1}) \subset B$. Puisque B est un fibré de rang 2 sur X_1, M_τ est l'orthogonal dans B de $\tau(L^{-1}) \subset B$ par rapport à l'accouplement anti-symétrique non-dégénéré $(\cdot, \cdot)$ sur B. En particulier, si $\tau' : L \hookrightarrow B$ est un plongement de L dans B tel que $\tau(L)^{-1}$ et $\tau'(L)$ soient orthogonaux, alors M_τ contient a la fois $\tau(L^{-1})$ et $\tau'(L) \subset B$.

Le plongement $\tau : L^{-1} \hookrightarrow B$ correspond aussi à un point (noté encore τ) de $\mathcal{H}$ (schéma de Hilbert des faisceaux inversibles de degré 0 plongés dans B, § 1.2.5) au-dessus de $x \in \Theta$. Pour que $\mathrm{Hom}(L, M_\tau) = 0$ (c'est-a-dire, pour qu'il n'y ait pas de $\tau' : L \hookrightarrow B$ qui soit orthogonal a τ), il faut et il suffit que $\mathcal{H}$ soit lisse en τ de dimension $g - 1$ (Proposition 2.4.1).

"Le schéma des différences".

Définition 4.1.1.1 (Schéma des différences) Pour $d > 0$ un entier, on note V_d l'image schématique du morphisme

$$\begin{aligned} \phi_d : X_1^d \times_k X_1^d &\to J_1 \\ (x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d) &\mapsto \mathcal{O}_X (x_1 + \cdots x_d - (y_1 + \cdots y_d)) . \end{aligned}$$

Définissons V'_d par le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} V'_d \arrow[r, "i'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & J_1 \arrow[d, "{[2]}"] \\ V_d \arrow[r, "i"] & J_1 \end{tikzcd}$$

Les propriétés suivantes des schémas des différences sont faciles a vérifier.

Lemme 4.1.1.2 (1) *Pour* $1 \leq d \leq g/2$, $\dim(V'_d) = \dim(V_d) = 2d$. *Pour* $d > g/2$, *on a* $\dim(V'_d) = g$.

(2) *Pour* $d > 0$, V'_d *est irréductible.*
(3) *Pour* $d > 0$, V_d *contient un translaté de* X_1, *par suite* $i' : V'_d \hookrightarrow J_1$ *induit une surjection sur les groupes fondamentaux* $\pi_1(V'_d) \to \pi_1(J_1)$.

Une limitation des sous-faisceaux inversibles de B. Les considérations qui suivent valent pour toute caractéristique $p \geq 2$, mais nous n'avons des applications que pour $p = 3$, et nous nous limitons à ce cas.

Pour $m \geq 0$ un entier, soit Θ_m le fermé de $J_1^{[m]}$ formé des faisceaux inversibles M sur X_1 de degré m qui admettent un plongement $M \hookrightarrow B$. En particulier, Θ_0 est l'ensemble sous-jacent à Θ. Nous allons donner une limitation à priori de Θ_m.

Soit M un faisceau inversible sur X_1 de degré m. Alors un plongement $M \hookrightarrow B \hookrightarrow F_*\Omega^1_{X/k}$ donne par adjonction un plongement $F^*M \hookrightarrow \Omega^1_{X/k}$, et donc une réalisation $F^*M \simeq \Omega^1_{X/k}(-D)$ où D est un diviseur positif ou nul sur X de degré $2g-2-3m$. Les diviseurs D en question sont paramétrés par $X^{(2g-2-3m)}$. Son image schématique dans $J^{[2g-2-3m]}$ est un fermé irréductible normal de dimension $\min(2g-2-3m, g)$. Par suite les faisceaux $F^*M \simeq \Omega^1_{X_1/k}(-D)$ sont paramétrés par un fermé irréductible et normal de $J^{[3m]}$ de dimension $\min(2g-2-3m, g)$, que nous notons $A'_{3m,\max}$. Le passage $M \mapsto F^*M$ est donné par le Verschiebung $V : J_1^{[m]} \to J^{[3m]}$. Finalement M appartient à $A_{m,\max} := \left(V^{-1}(A'_{3m,\max})\right)_{\mathrm{red}}$.

Lemme 4.1.1.3 $A_{m,\max}$ *est équidimensionnel de dimension* $\min(2g-2-3m, g)$, *irréductible lorsque* $2g-2-3m > 0$.

Démonstration En effet, $V : J_1^{[m]} \to J^{[3m]}$ se factorise en un morphisme radiciel et un morphisme V_{et}. Pour établir le lemme, il suffit de considérer V_{et}. L'irréductibilité résulte de [26] (Proposition 9) et du fait que pour $2g-2-3m > 0$, $A_{m,\max}$ contient des translatés de X_1. □

On a donc $\Theta_m \subset A_{m,\max}$, ce qui fournit une limitation à priori de la taille de Θ_m. La discussion dans les sections suivantes s'organise autour de la taille de Θ_m dans $A_{m,\max}$.

Si $i : M \hookrightarrow B$ est un plongement d'un faisceau inversible de degré $m \geq 0$, $M(-D)$ est contenu dans B pour tout D effectif de degré m. Considérons l'application

$$\alpha_m : X_1^{(m)} \times A_{m,\max} \to J_1$$

donnée par $(D, M) \mapsto M(-D)$, et soit $B_{m,\max}$ son image. Notons $\mathrm{Sat}(\Theta_m)$ l'image de $X_1^{(m)} \times \Theta_m$ par α_m. Comme X_1 engendre J_1, le fermé $B_{m,\max}$ est irréductible de dimension $2g-2-2m$ du moins, tant que $2g-2-2m \leq g$, c'est-ê-dire $m \geq (g-2)/2$.

4.1.2 Θ *est réduit en caractéristique* 3 *pour* $g \geq 2$

Dans ce numéro, on montre que Θ est toujours réduit en caractéristique 3 pour $g \geq 2$. Supposons que Θ ne soit pas réduit. Alors il existe une composante irréductible $\widetilde{\Theta}$ (munie de la structure de sous-schéma fermé réduit) de Θ de multiplicité ≥ 2. D'après la Proposition 1.2.6.2, on a alors $\Theta = 2\widetilde{\Theta}$, et donc $\widetilde{\Theta}$ est algébriquement équivalent à Θ_{class}.

Soit η le point générique de $\widetilde{\Theta}$. Comme Θ est singulier en η, d'aprés le Corollaire 2.4.3, il existe un plongement $\tau : L_\eta^{-1} \hookrightarrow B_\eta$ (sur $X_1 \times_k \eta$) de saturation M_τ, et un plongement $\tau' : L_\eta \hookrightarrow B_\eta$ de sorte que $\tau'(L_\eta) \subset M_\tau$. Soit $m = \deg(M_\tau)$. Comme $g \geq 2$, L_η n'est pas d'ordre divisant 2, donc $m > 0$. Il existe donc des diviseurs effectifs D_η et D'_η de degré m

sur la courbe $X_{1,\eta} := X_1 \times_k \eta$ tels que $L_\eta(D_\eta) = M_\tau$ et $L_\eta^{-1}(D'_\eta) = M_\tau$. En particulier, on trouve que $M_\tau^2 = \mathcal{O}_{X_{1,\eta}}(D_\eta + D'_\eta)$ et $L_\tau^2 = \mathcal{O}_{X_{1,\eta}}(D_\eta - D'_\eta)$.

Cette dernière condition signifie que L_η^2 est dans le "schéma des différences" V_m (définition 4.1.1.1). Donc $\overline{\{\eta\}} = \widetilde{\Theta} \subset V'_m$. Par suite $g-1 \leq \dim(V'_m) = \min(2m, g)$ (4.1.1.2), donc $2m \geq g-1$. Par ailleurs, $M_\tau \in \Theta_m$, et les L de $\widetilde{\Theta}$ de la forme $M(-D)$, avec $M \in \Theta_m$ et D diviseur effectif de degré m sur X_1, sont dans $B_{m,\max}$ de dimension $\min(2g-2-2m, g)$. Comme $\widetilde{\Theta}$ est de dimension $g-1$, on a $2m \leq g-1$.

Finalement, on a $2m = g-1$, ce qui achève la démonstration pour g pair.

Pour g impair, on a $m = (g-1)/2 > 0$. Comme V'_m est irréductible de dimension $g-1$, on a $V'_m = \widetilde{\Theta}$. Or V'_m est algébriquement équivalent à $2^2 V_m = 4V_m$. Comme $\widetilde{\Theta}$ est algébriquement équivalent a Θ_{class} (Remarque 1.2.6.3), et que la classe de la polarisation principale de Θ_{class} est non divisible dans $\mathrm{NS}(J_1)$, on a une contradiction. Donc Θ est réduit.

4.1.3 Etude du lieu singulier de Θ de dimension $g-2$

Dans ce numéro, on recherche les composantes du lieu singulier Θ_{sing} de Θ de dimension $g-2$, qui existent si et seulement si Θ est non normal, et on montre que que Θ ne contient pas de composante irréductible qui est un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1 pour une courbe de genre $g \geq 3$ (le cas où $g = 2$ sera traité dans § 4.3.2.1, où l'on montrera que Θ est toujours intègre pour une courbe lisse de genre 2 en caractéristique 3).

Lemme 4.1.3.1 *Supposons $p = 3$. Soit t un point de Θ de codimension 1 en lequel Θ n'est pas lisse. Soit L_t le faisceau inversible sur $X_{1,t} := X_1 \times_k t$ correspondant, alors il existe $\xi \in \mathcal{H}$ (§ 1.2.5) au-dessus de t, où $\mathcal{H}$ n'est pas lisse de dimension $g-1$. En particulier, ξ correspond à un plongement $L_t^{-1} \hookrightarrow B_t$ de saturation M_ξ avec $L_t \subset M_\xi$ pour un plongement $L_t \hookrightarrow B_t$ convenable.*

Démonstration Considérons le morphisme naturel surjectif $\mathcal{H} \to \Theta$, et considérons la fibre $\mathcal{H}_t$ au-dessus de t. Distinguons deux cas:

(1) Si $h^0(X_{1,t}, B \otimes L_t) = 1$ (et donc $h^0(X_{1,t}, B \otimes L_t^{-1}) = 1$), alors le morphisme $\mathcal{H} \to \Theta$ est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage de t, et en particulier, $\mathcal{H}$ n'est pas lisse de dimension $g-1$ en l'unique point $\xi \in \mathcal{H}$ au-dessus de $t \in \Theta$. D'après Proposition 2.4.2, l'unique plongement $L_t \hookrightarrow B_t$ est donc tel que $L_t^{-1} \hookrightarrow M_t$.

(2) Supposons que $h^0(X_{1,t}, B \otimes L_t) > 1$, de sorte que la fibre de $\mathcal{H}$ au-dessus de t est de dimension ≥ 1. Soit Θ_i une composante irréductible de Θ contenant t, η_i son point générique. Comme Θ est réduit (4.1.2), le morphisme $\mathcal{H} \to \Theta$ est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage de $\eta_i \in \Theta$. Soit τ_i l'unique point de $\mathcal{H}$ au-dessus de η_i. Notons Y l'adhérence schématique de τ_i dans $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H} \to \Theta$ est propre, $Y \to \Theta_i$ est surjectif. Soit ξ un point de Y au-dessus de t. Comme t est de codimension 1 dans Θ, $Y \to \Theta_i$ est quasi-fini en ξ. Or $\mathcal{H}$ a une fibre irréductible de dimension ≥ 1 au-dessus de t, il y a donc au moins deux composantes irréductibles de $\mathcal{H}$ qui passent par ξ, et donc $\mathcal{H}$ n'est pas lisse en ξ. Alors ξ correspond a un plongement $\xi : L_t^{-1} \to B_t$ de saturation M_ξ, tel qu'il existe un plongement $L_t \hookrightarrow B_t$ de sorte que $L_t \hookrightarrow M_\xi$ (Proposition 2.4.2), d'où le résultat. □

La preuve du lemme suivant est immédiate.

Lemme 4.1.3.2 *Soit k un corps.*

(1) *Soient A une variété abélienne, $Y = x + B$ un translaté d'une sous-variété abélienne de dimension $< \dim(A)$ de A. Alors le morphisme $\pi_1(Y) \to \pi_1(A)$ est de conoyau infini.*

(2) *Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur k, avec J_C sa jacobienne. Soit $F \subset J_C$ un fermé irréductible de J_C muni de la structure de sous-schéma réduit. Supposons que F contienne un translaté $\widetilde{C}$ de C, alors le morphisme naturel $\pi_1(F) \to \pi_1(J_C)$ est surjectif. En particulier, F n'est pas un translaté d'une sous-variété abélienne de J_C.*

Soient Σ une composante irréductible réduite de dimension $g-2$ de Θ_{sing}, $t \in \Sigma$ son point générique avec L_t le faisceau inversible correspondant sur $X_{1,t} := X_1 \times_k t$. D'après le lemme ci-dessus, il existe $\xi : L_t^{-1} \hookrightarrow B_t$ de saturation M_ξ, et $\xi' : L_t \hookrightarrow B_t$ de sorte que $\xi'(L_t) \subset M_\xi$. Soit m le degré de M_ξ. Comme $g \geq 3$, L_t n'est pas d'ordre divisant 2, donc $m > 0$. Par suite, il existe des diviseurs D_t et D'_t positifs de degré m de $X_{1,t}$ tels que $L_t(D_t) = M_\xi$ et $L_t^{-1}(D'_t) = M_\xi$. En particulier, $L_t^2 = \mathcal{O}_{X_{1,t}}(D_t - D'_t)$, $M_\xi^2 = \mathcal{O}_{X_{1,\xi}}(D_t + D'_t)$. On a donc $t \in V'_m \cap B_{m,\max}$, par suite $\Sigma \subset V'_m \cap B_{m,\max}$. Par conséquent $(g-2)/2 \leq m \leq g/2$ pour une raison de dimension. Il y a deux cas à distinguer: le cas où g est pair et le cas où g est impair.

Cas où g est pair. On suppose donc $g \geq 4$, le cas où $g = 2$ sera traité plus tard au § 4.3.2.1. Alors ou bien $m = (g-2)/2$, ou bien $m = g/2$.

Examinons d'abord le cas $m = (g-2)/2$. Alors V'_m est un sous-schéma fermé irréductible de J_1 de dimension $g-2$ (4.1.1.2). Donc $\Sigma = V'_m$. Alors une composante irréductible Θ_i de Θ qui contient $\Sigma = V'_m$ ne peut Otre un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1 car son image par la multiplication par 2 serait aussi un translaté d'une sous-variété abélienne, qui contiendrait V_m. Or V_m pour $m > 0$, contient un translaté de X_1, d'où une contradiction (Lemme 4.1.3.2).

Examinons maintenant le cas $m = g/2$. Alors $A_{m,\max}$ est équidimensionnel de dimension $2g-2-3m = \frac{g}{2}-2$, irréductible pour $g \geq 6$, et $B_{m,\max}$ est équidimensionnel de dimension $g-2$. Donc Σ est une composante irréductible de $B_{m,\max}$. En particulier, Σ contient un translaté de X_1. Donc, d'après le Lemme 4.1.3.2, une composante irréductible Θ_i de Θ qui contient Σ ne peut être un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1.

Réciproquement, si une composante irréductible de $A_{m,\max}$ est une composante de Θ_m, alors $\mathrm{Sat}(\Theta_m)$ sera une composante Σ singulière de Θ, de dimension $g-2$, a condition que si $M \in \Theta_m$, on ait $h^0(X_1, M^2) > m$, et on donnera plus loin un exemple pour $g = 4$.

Cas où g est impair. Supposons $g \geq 3$ impair. On doit examiner le cas $m = (g-1)/2$. Alors $A_{m,\max}$ est irréductible de dimension $(g-1)/2$, et $\dim(\Theta_m) \leq (g-1)/2$. Par ailleurs, Σ est contenu dans $\mathrm{Sat}(\Theta_m)$, donc

$$g-2 = \dim(\Sigma) \leq \dim(\mathrm{Sat}(\Theta_m)) = \dim(\Theta_m) + (g-1)/2 \leq \dim(B_{m,\max}) = g-1.$$

Distinguons à nouveau deux cas:

Cas (i): $\dim(\Theta_m) = \frac{g-1}{2} - 1$. Soient $\Theta_{m,i}$ $(i \in I)$ les composantes irréductibles de Θ_m, de dimension $\frac{g-1}{2} - 1$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $\Sigma = \alpha_m(X_1^{(m)} \times \Theta_{m,i_0})$. En particulier, comme $m > 0$, Σ contient un translaté de X_1, et aucune composante irréductible contenant Σ n'est un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1 (Lemme 4.1.3.2).

Cas (ii): $\dim(\Theta_m) = (g-1)/2$. Alors $\Theta_m = A_{m,\max}$ et $\Theta' := \mathrm{Sat}(\Theta)$ est une composante irréductible de Θ.

Lemme 4.1.3.3 *Θ' est la spécialisation ensembliste d'un diviseur qui existe sur la jacobienne générique, par suite Θ' est algébriquement équivalent à $r \cdot \Theta_{\text{class}}$ avec $r \geq 1$ un entier.*

Démonstration Gardons les notations ci-dessus. Soient $S = \{\eta, s\}$ le spectre d'un anneau de valuation discrète complet contenant k, $\mathcal{X}/S$ une courbe propre lisse de genre g dont la fibre générique est la courbe générique de genre g, et dont la fibre $\mathcal{X}_s$ est $X_s = X$. Notons $\mathcal{J}$ la jacobienne de $\mathcal{X}/S$. Soit $\mathcal{D}$ l'image schématique du morphisme

$$\mathcal{X}^{(g-1)/2} \to \mathcal{J}^{3(g-1)/2}$$

donné par $(x_1, \ldots, x_{(g-1)/2}) \mapsto \Omega^1_{\mathcal{X}/S}(-x_1 - \cdots - x_{(g-1)/2})$. Soit $\mathcal{D}'$ l'image réciproque de $\mathcal{D}$ par $V := F^* : \mathcal{J}^{(g-1)/2} \to \mathcal{J}^{3(g-1)/2}$. On a $(\mathcal{D}'_s)_{\mathrm{red}} = \Theta'$. Par ailleurs, comme $\mathcal{X}_\eta$ est générique, $\mathrm{NS}(\mathcal{J}_{1,\eta}) \simeq \mathbf{Z}$, ce qui implique que $\mathcal{D}'_\eta$ est algébriquement équivalent à $r'\Theta_{\mathrm{class}}$ avec $r' \geq 1$ un entier. Par spécialisation, $\Theta' = (\mathcal{D}'_s)_{\mathrm{red}}$ est donc algébriquement équivalent à $r\Theta_{\mathrm{class}}$ avec $r \leq r'$ un entier ≥ 1. D'où le résultat. □

Revenons au diviseur Θ'. Alors Θ' est algébriquement équivalent à $r\Theta_{\mathrm{class}}$ avec r un entier strictement positif. Comme Θ est algébriquement a $2\Theta_{\mathrm{class}}$, on sait que $1 \leq r \leq 2$ (Proposition 1.2.6.2). Donc ou bien $r = 1$, et ceci implique que Θ est une somme de deux composantes translatés de Θ_{class}; ou bien $r = 2$, et alors $\Theta = \Theta'$ est irréductible (Proposition 1.2.6.2). En tous cas, Θ ne contient pas de composante translatée d'une sous-variété abélienne de J_1.

En résumé, on a montré le théorème suivant:

Théorème 4.1.3.4 *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 3, X/k une courbe propre lisse connexe de genre $g \geq 2$. Alors: (1) Θ est réduit; (2) si $g \geq 3$, aucune composante de Θ n'est un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1.*

Remarque 4.1.3.5 (Complément au cas g impair) Dans le cas g impair, il paraet probable que le cas où Θ est une somme de deux composantes translatées de Θ_{class} ne puisse pas se produire. En effet, sur les complexes, il est connu (§ 3 de [1], voir aussi [46]) que, pour une courbe X lisse sur k, l'application $\mathcal{M} \to |2\Theta_{\mathrm{class}}|$ qui à un fibré vectoriel semi-stable V de rang 2 de pente $g-1$ sur X, associe son diviseur Θ_V, est une immersion de l'espace de modules des fibrés semi-stables de rang 2 de pente $g-1$ vers le système linéaire de $2\Theta_{\mathrm{class}}$ si X n'est pas hyperelliptique, et induit une immersion $\mathcal{M}/\{1, \tau\} \to |2\Theta_{\mathrm{class}}|$ si X est hyperelliptique (où τ est l'involution hyperelliptique de X). Si un tel résultat est encore vrai en caractéristique $p = 3$, Θ_B ne peut pas être somme de deux translatés de Θ_{class}, en raison de la stabilité de B.

Un exemple en genre 4 où Θ n'est pas normal. Reprenons la courbe de Tango X construite dans l'exemple 1.2.9.7 en prenant $d = 4$. Gardons les notations de 1.2.9.7. Alors X est une courbe de genre 4, et $M = \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{10} b_i - \pi^{-1}(\sum_{j=1}^{4} c_j))$ est un sous-faisceau inversible de B (où $\pi : X \to \mathbf{P}^1_k$ est le revêtement fini étale de degré 2, $\{b_i\}_{i=1,\ldots,10}$ sont les points de X de ramification de π, $\{c_j\}_{j=1,2,3,4} \subset \mathbf{P}^1_k = \mathbf{P}$ tels que $c_j \neq a_i := \pi(b_i)$ pour tout i). Alors $\Sigma := \{M(-D) | D \in X^{(2)}\}$ est un fermé de dimension 2 de Θ. Montrons que Θ est singulier en tous les points de Σ. En effet, comme $M^2 = \mathcal{O}_X\left(2\left(\sum_{i=1}^{10} b_i - \pi^{-1}(\sum_{j=1}^{4} c_j)\right)\right) \simeq \pi^*\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i=1}^{10} a_i - 2(\sum_{j=1}^{4} c_j)\right)\right) \simeq \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(2))$, on a $h^0(X, M^2) \geq 3$. Donc $h^0(X, M^2(-D)) \geq 1$ pour tout diviseur D effectif de degré 2. Par suite, pour tout D diviseur effectif de degré 2 sur X, il existe un D' diviseur effectif de degré 2 tel que $M^2 = \mathcal{O}_X(D + D')$. Donc $L := M(-D) \hookrightarrow N \hookrightarrow B$ est tel que $L^{-1} \simeq M(-D') \hookrightarrow M$, c'est-à-dire, ces deux plongements sont orthogonaux par rapport au produit $(\cdot, \cdot)$ sur B. Donc, d'après le critère de lissité (Proposition 2.2.2), Θ est singulier en L. Donc Θ contient un fermé de points singuliers de codimension 1, ce qui implique que Θ n'est pas normal.

4.2 Le diviseur thêta en genre 2 et en toute caractéristique (positive)

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X une courbe propre lisse connexe de genre $g = 2$ sur k. Notons Θ le diviseur thêta associé au faisceau des formes différentielles localement exactes sur X_1. Le but de cette section est de montrer qu'au moins dans le cas ordinaire, aucune composante de Θ n'est un translatè d'une sous-variété abélienne de J_1.

4.2.1 Analyse de la lissité aux points d'ordre p

Sur X_1, on dispose de la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/k} \xrightarrow{c} \Omega^1_{X_1/k} \longrightarrow 0 .$$

Pour L un faisceau inversible de degré 0, on a donc $h^0(X_1, B \otimes L) \leq h^0(X_1, F_*(\Omega^1_{X/k}) \otimes L) = h^0(X, \Omega^1_{X/k} \otimes F^*L) = 1$ sauf si $F^*L = L^p = \mathcal{O}_X$, où l'on pourrait avoir $h^0(X_1, B \otimes L) = 2$. On a donc le lemme suivant:

Lemme 4.2.1.1 *Avec les notations ci-dessus, soit $x \in \Theta$ un point d'ordre p avec L le faisceau inversible de degré 0 correspondant. Alors Θ est singulier en x si et seulement si $h^0(X_1, B \otimes L) = 2$. Cette condition équivaut au fait que le morphisme $c \otimes 1_L : H^0(X, \Omega^1_{X/k} \otimes F^*L) \to H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k} \otimes L)$ est nul.*

Remarque 4.2.1.2 Soit $x = [L] \in \Theta$ un point d'ordre p, et notons ω_x la forme de Cartier associée. On voit L comme un sous-faisceau du faisceau des fonctions méromorphes de X_1. Soit (U_α, f_α) une section méromorphe de L, on a donc $f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}_{X_1}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$. Comme L est d'ordre p, il existe $u_\alpha \in \mathcal{O}_{X_1}(U_\alpha)^*$ pour chaque α tel que $f_\alpha^p/f_\beta^p = u_\alpha/u_\beta$. La forme ω_x est donc la forme différentielle holomorphe $(U_\alpha, d(u_\alpha)/u_\alpha)$. Soit ω une autre section globale de $\Omega^1_{X_1/k}$ tel que ω et ω_x forment une k-base de $H^0(X, \Omega^1_{X/k})$. Ceci nous fournit une section $(U_\alpha, \omega \otimes f_\alpha^p u_\alpha)$ de $\Omega^1_{X/k} \otimes L^p$. Par l'opérateur de Cartier, elle donne la section $(U_\alpha, c(u_\alpha\omega) \otimes f_\alpha)$ de $\Omega^1_{X_1/k} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} L$. Par le lemme, on voit que Θ est singulier en x si et seulement si cette forme est nulle. Ceci équivaut à dire que $u_\alpha\omega$ est localement exacte.

Théorème 4.2.1.3 *Supposons que X est ordinaire de genre 2 en caractéristique $p > 0$. Soit H une droite affine dans le $\mathbf{F}_p$-espace $J_1[p](k) \simeq \mathbf{F}_p^2$ qui ne passe pas par l'origine de $J_1[p](k)$, alors Θ est lisse en au moins deux points de H.*

Démonstration Soient $x = [L]$, $x' = [L'] \in \Theta$ deux points d'ordre p qui ne sont pas $\mathbf{F}_p$-colinéaires dans $J_1[p](k)$, et notons $\omega_x = (U_\alpha, d(u_\alpha)/u_\alpha)$ et $\omega_{x'} = (U_\alpha, d(v_\alpha)/v_\alpha)$ les formes de Cartier associées (où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de X_1, $u_\alpha,\ v_\alpha \in \mathcal{O}_{X_1}(U_\alpha)^*$ tels que (U_α, u_α) (resp. (U_α, v_α)) est un 1-cobord de $\mathcal{O}^*_{X_1}$ correspondant à L^p (resp. à L'^p)). Pour le faisceau inversible $L \otimes L'^{\otimes^i}$ $(i = 0, \ldots, p-1)$, sa forme de Cartier s'écrit $\omega_x + i\omega_{x'} = (U_\alpha, \frac{du_\alpha}{u_\alpha} + i\frac{dv_\alpha}{v_\alpha})$. Comme x et x' ne sont pas colinéaires, on peut prendre $\{\omega_{x+ix'}, \omega_x\}$ comme k-base des sections globales de $\Omega^1_{X/k}$ pour $i \neq 0$. D'aprâs ce qui précède, Θ est singulier en $x + ix'$ si et seulement si la forme $(U_\alpha, u_\alpha v_\alpha^i du_\alpha/u_\alpha)$ est localement exacte.

Comme $\omega_{x'} \neq 0$ dans $H^0(X, \Omega^1_{X/k})$, on sait que v_α n'est pas une puissance p-ième d'un élément de $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$. Quitte à diminuer U_α, on peut supposer que u_α s'écrit sous la forme

$u_\alpha = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j^p v_\alpha^j$ avec $\lambda_j \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$. Donc $du_\alpha = \sum_{j=1}^{p-1} j\lambda_j^p v_\alpha^{j-1} dv_\alpha$, et $v_\alpha^i du_\alpha = \sum_{j=1}^{p-1} j\lambda_j^p v_\alpha^{i+j-1} dv_\alpha$. C'est une forme localement exacte si et seulement si $\lambda_{p-i} = 0$. Donc, pour que Θ soit singulier en $x+iy$ pour $1 \leq i \leq p-1$, il faut $\lambda_{p-i} = 0$, ceci entraîne que u_α est une puissance p-ième, d'où une contradiction.

Ceci étant, il existe donc au moins un $i \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que Θ soit lisse en $x+iy$. Supposons qu'il y en a un seul $i \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que Θ soit lisse en $x+iy$, et montrons que Θ est lisse en x. Quitte à remplacer L' par une puissance convenable, on peut supposer que $i = 1$. Donc $u_\alpha = \lambda_0^p + \lambda_{p-1}^p v_\alpha^{p-1}$. Si Θ est singulier en x, ceci implique que $v_\alpha du_\alpha / u_\alpha$ est localement exacte. Or $v_\alpha du_\alpha / u_\alpha = (p-1)\lambda_{p-1}^p v_\alpha^{p-1} dv_\alpha / (\lambda_0^p + \lambda_{p-1}^p v_\alpha^{p-1})$. Si c'est une forme localement exacte, $\lambda_0 = 0$, ce qui implique que $(p-1) dv_\alpha / v_\alpha = du_\alpha / u_\alpha$, d'où une contradiction puisque L et M ne sont pas colinéaires. □

Complètons le Théorème 4.2.1.3 en considérant les courbes de p-rang 1.

Théorème 4.2.1.4 *Soit X de genre 2 et de p-rang 1. Alors Θ est lisse en au moins un point d'ordre p (et donc en deux points d'ordre p si $p \geq 3$ par symétrie).*

Démonstration Soit $x \in J_1$ un point d'ordre p. Soit $\omega_x = (U_\alpha, du_\alpha / u_\alpha)$ la forme de Cartier associée à x. Soit ω une autre forme différentielle holomorphe sur X telle que ω et ω_x forment une k-base de $H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k})$. Comme $\Omega^1_{X_1/k}$ est un $\mathcal{O}_{X_1}$-module de rang 1, il existe une fonction méromorphe h de X telle que $\omega = h\omega_x$. Donc il suffit de montrer qu'il existe un $i \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que $(U_\alpha, hu_\alpha^{i-1} du_\alpha)$ ne soit pas localement exacte. Quitte à diminuer U_α, on peut supposer que $h = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j^p u_\alpha^j$. Alors $hu_\alpha^{i-1} du_\alpha = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j^p u_\alpha^{i+j-1} du_\alpha$ est une forme localement exacte si et seulement si $\lambda_{p-i} = 0$. Donc si Θ est singulier en tout ix quelque soit $i \in \{1, \dots, p-1\}$, on obtient que $\omega = \lambda_0^p \omega_x$. Or ω et ω_x sont des formes holomorphes sur X_1 de genre 2, les diviseurs de ω et ω_x sont effectifs de degré 2. Ce qui implique que $\lambda_0 \in k - \{0\}$: en effet, si λ_0 n'est pas un scalaire, λ_0 a un seul p(le d'ordre 1, mais comme X est de genre $g = 2$, un tel λ_0 n'existe jamais. Donc $\lambda_0 \in k - \{0\}$. Ceci contredit le fait que ω et ω_x forment une k-base de $H^0(X_1, \Omega^1_{X_1/k})$. □

4.2.2 Composantes principales de Θ et amplitude

Corollaire 4.2.2.1 *Supposons X ordinaire de genre 2. Alors toute composante principale (définition 1.3.3) est ample.*

Démonstration En effet, soit $D \subset \Theta$ une composante principale de Θ. Supposons qu'elle est de la forme $x + E$, avec $E \subset J_1$ une courbe elliptique, x un point d'ordre p. Comme E est ordinaire, D contient au moins deux points x, y d'ordre p. Comme X est ordinaire, Θ ne passe pas par l'origine. Ceci entraene que $x + E[p](k)$ est une droite affine de $J_1[p](k) \simeq \mathbf{F}_p^2$ qui ne passe pas par l'origine. D'après le Théorème 4.2.1.3, on trouve que Θ est lisse en au moins deux points d'ordre p qui sont contenus dans D. Or D est un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1, il existe un $z \in E(k)$ tel que $x = y + z$, d'où une contradiction avec 2.3.4. □

Complètons le Corollaire 4.2.2.1 en considérant les courbes non-ordinaires.

Corollaire 4.2.2.2 *Soit X une courbe de genre 2 de p-rang ≤ 1. Soit Θ' la réunion des composantes passant par l'origine. Alors Θ' est un diviseur ample de J_1.*

Démonstration Si X est de p-rang 0, comme Θ' est la réunion des composantes principales de Θ, elle est ample (Corollaire 1.2.7.5). Il reste a traiter le cas où X est de p-rang 1. Si Θ' n'est pas ample, soit E la plus grande sous-variété abélienne qui laisse stable Θ'. D'après la propriété de Dirac, on sait que E est une courbe elliptique ordinaire (Corollaire 1.2.7.6). En particulier, on sait que Θ' contient tous les points d'ordre p de J_1. Or Θ est lisse en au moins un point d'ordre p (Théorème 4.2.1.4), disons $x \in J_1$. Soit f une équation locale de Θ en x. La propriété de Dirac nous dit que f est nulle dans $\mathcal{O}_{\ker(V),x}$. Considérons l'automorphisme T_x de J_1 défini par $y \mapsto y + x$. Il laisse stable Θ'. Donc $T_x^*(f)$ est une équation locale de Θ' en 0, par suite elle fait partie de l'équation locale de Θ en 0. En particulier, si g est une équation locale de Θ en 0, elle est nulle dans $\mathcal{O}_{\ker(V),0}$. Ceci nous fournit une contradiction avec la propriété de Dirac (1.2.7.7). $\square$

4.2.3 Composantes non principales en genre 2

Dans ce numéro, on étudie les composantes non principales. En particulier, on montre que lorsque la courbe X est ordinaire (de genre 2), Θ ne contient pas de composante irréductible qui est un translaté d'une sous-variété abélienne de J_1.

Commençons par un résultat facile, qui découle directement de la classification des fibrés vectoriels sur une courbe elliptique.

Lemme 4.2.3.1 *Soit E une courbe elliptique sur k.*

(1) *Soit V un fibré vectoriel sur E. Supposons que $h^0(E, V \otimes L) = 1$, et $h^1(E, V \otimes L) = 0$ quelque soit $L \in \mathrm{Pic}^{\circ}_{E/k}(k)$. Alors V est stable.*
(2) *Soit W un fibré vectoriel de E tel que $h^0(E, W \otimes L) = h^1(E, W \otimes L) = 1$ quelque soit $L \in \mathrm{Pic}^{\circ}_{E/k}(k)$. Alors W n'est pas stable, et sa filtration de Harder-Narasimhan s'écrit $0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 = W$ avec W_1 un sous-fibré stable de degré 1, et W/W_1 un fibré stable de degré -1.*

Démonstration Soit

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i \subset \cdots \subset V_r = V$$

la filtration de Harder-Narasimhan de V, telle que V_i/V_{i-1}, pour $1 \le i \le r$ soit un fibré stable non-trivial de pente λ_i, et que l'on ait $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_{r-1} \ge \lambda_r$. On raisonne par l'absurde. Supposons que $r \ge 2$. Montrons d'abord que $\lambda_1 > 0$. Sinon, $\lambda_i \le 0$ pour $1 \le i \le r$. Les V_i/V_{i-1} sont stables donc indécomposables de E. D'après Atiyah et Oda ([34] section 2, page 60), il existe exactement un $L_i \in J_E$ tel que $h^0(E, (V_i/V_{i-1}) \otimes L_i) = h^1(E, (V_i/V_{i-1}) \otimes L_i) > 0$. En particulier, ceci entraîne qu'il n'y a qu'un nombre fini de $L \in J_E$ tels que $h^0(E, V \otimes L) \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $h^0(E, V \otimes L) = 1$ quelque soit $L \in J_E$. Donc $\lambda_1 > 0$. Ensuite, montrons que $\lambda_2 < 0$. En fait, on a la suite exacte suivante:

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_2/V_1 \to 0.$$

Comme $\lambda_2 \ge 0$, il existe au moins un faisceau inversible L tel que $h^0(E, (V_2/V_1) \otimes L) > 0$. La suite exacte longue associée à la cohomologie nous montre que $h^0(E, V_2 \otimes L) \ge 2$ (rappelons que $\lambda_1 > 0$, donc $h^1(E, V_1 \otimes L) = 0$). A priori, $h^0(E, V \otimes L) \ge 2$, d'où une contradiction. Donc $\lambda_r < 0$ puisque $r \ge 2$. Considérons la suite exacte suivante:

$$0 \to V_{r-1} \to V \to V/V_{r-1} \to 0,$$

on trouve un morphisme surjectif: $H^1(E, V) \to H^1(E, V/V_{r-1})$ avec $H^1(E, V/V_{r-1}) \neq 0$ (car V/V_{r-1} est stable de pente $\lambda_r < 0$). Donc $h^1(E, V) \geq 1$, d'où une contradiction. Donc $r = 1$, c'est-à-dire, V est stable. D'où (1). Le même raisonnement nous montre la partie (2) du lemme. Ceci achève la démonstration. □

Proposition 4.2.3.2 *Soit D une composante irréductible (réduite) de Θ, et supposons que D ne passe par aucun point d'ordre divisant p. Alors D n'est pas une courbe de genre* 1.

Démonstration On raisonne par l'absurde. Supposons que D soit une courbe de genre 1. Comme D ne passe pas par aucun point d'ordre divisant p, il existe un morphisme fini de courbes lisses $f : X_1 \to E$ avec E une courbe elliptique, et un faisceau inversible M de degré 0 sur X_1, tel que $M \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} f^*L \in D$ quelque soit $L \in J_E = \mathrm{Pic}^\circ_{E/k}(k)$. Comme D ne passe pas par aucun point d'ordre divisant p, on a $h^0(X_1, F_*\Omega^1_{X/k} \otimes M \otimes f^*L) = h^0(X_1, \Omega^1_{X/k} \otimes F^*(M \otimes f^*L)) = 1$. Donc $h^0(X_1, B \otimes M \otimes f^*L) = 1$ quel que soit $L \in J_E$. Posons $\mathcal{E} = f_*(B \otimes M)$, $\mathcal{F} = f_*(F_*\Omega^1_{X/k} \otimes M)$ et $\mathcal{G} = f_*(\Omega^1_{X/k} \otimes M)$. Comme $f : X_1 \to E$ est fini, on a la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0,$$

et $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des fibrés sur E avec les propriétés suivantes: $h^0(E, \mathcal{E} \otimes L) = h^0(E, \mathcal{F} \otimes L) = h^1(E, \mathcal{E} \otimes L) = 1$ quelque soit $L \in J_E$, et $h^1(E, \mathcal{F} \otimes L) = 0$ pour tout $L \in J_E$. Donc, d'après le lemme précédent, on sait que $\mathcal{F}$ est un fibré stable sur E, et $\mathcal{E}$ admet une filtration de Harder-Narasimhan de la forme $0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{E}_1$ soit stable de pente > 0. En particulier, $\mathcal{F}$ admet un sous-fibré de pente > 0. Mais $\mathcal{F}$ est un fibré de degré $1 = h^0(E, \mathcal{F})$, donc la pente de $\mathcal{E}_1$ est strictemeñt plus grande que celle de $\mathcal{F}$, ceci contredit la stabilité de $\mathcal{F}$. Le résultat s'en déduit. □

Comme corollaire direct, on a

Corollaire 4.2.3.3 *Supposons X ordinaire de genre* 2*. Alors toute composante irréductible de Θ est ample.*

4.3 Cas où $g = 2$ et $p = 3$

4.3.1 Un résultat classique

Le résultat suivant est classique, qui découle sans difficulté du théorème d'indice de Hodge.

Proposition 4.3.1.1 *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, X/k une courbe propre lisse connexe de genre* 2*. Soit D un diviseur effectif sur J, qui est algébriquement équivalent a $2\Theta_{\mathrm{class}}$. Alors*:

(1) *Ou bien D est irréductible,*
(2) *Ou bien $D = X_1 + X_2$ où X_i est un translaté de Θ_{class}.*
(3) *Ou bien X est un revêtement de degré* 2 *d'une courbe elliptique, et $D = (x_1 + E_1) + (x_2 + E_2)$ où E_i est une courbe elliptique $x_i \in J$. De plus, $E_1 \cdot E_2 = 4$.*

4.3.2 Irréductibilité de Θ pour $g = 2$ et $p = 3$

Théorème 4.3.2.1 *Soit X une courbe lisse propre connexe, de genre $g = 2$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p = 3$. Soit Θ son diviseur thêta associé au faisceau B. Alors le faisceau $\mathcal{Q}$ (* § 1.2.4*) est inversible de degré* 4 *sur Θ. De plus Θ est intègre, et ses seuls points singuliers sont ses points de torsion d'ordre divisant* 2.

Voici un lemme qui est extrait de [4] (Proposition 3.1 de [4]).

Lemme 4.3.2.2 *Soit E un fibré stable de rang $r \geq 2$ et de pente $\lambda \leq 1$. Soit F le sous-faisceau engendré par les sections globales $H^0(X, E)$ de E. Alors F est un sous-fibré de E qui est isomorphe à $\mathcal{O}_X^n$ avec $n = h^0(X, E)$.*

Corollaire 4.3.2.3 *Soit E est un fibré stable de rang $r \geq 2$ et de pente ≤ 1, alors $h^0(X, E) < r$.*

Démonstration du Théorème 4.3.2.1 Comme $p = 3$ et $g = 2$, le fibré vectoriel stable B est de pente 1 et de rang 2. D'après le lemme précédent, pour tout L faisceau inversible de degré sur X_1 qui correspond à un point $x \in \Theta$, on a $h^0(X_1, B \otimes L) = 1$. En particulier, le faisceau $\mathcal{Q}$ est inversible sur Θ (Lemme 1.2.4.1). Soit d son degré. Comme $(-1)^*\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \simeq \omega_\Theta \simeq \mathcal{O}_{J_1}(\Theta)|_\Theta$ (§ 1.2.4), on a $d = \deg(\omega_\Theta)/2 = 4$. Comme B est stable de pente 1, soit $L^{-1} \hookrightarrow B$ l'unique plongement (à multiplication par un scalaire près) de L^{-1} dans B, alors L^{-1} est égal a sa saturation. Donc si $x \in \Theta$ est un point singulier, d'après le critère de lissité 2.2.2, il faut et il suffit que $\mathrm{Hom}(L, L^{-1}) \neq 0$. Ceci équivaut au fait que $L^2 = \mathcal{O}_{X_1}$.

Il reste à montrer que Θ est intègre. Comme $p = 3$, Θ est un diviseur effectif réduit algébriquement équivalent à $2\Theta_{\text{class}}$. Donc on a l'une des trois possibilités pour Θ décrites dans la Proposition 4.3.1.1. D'après [40], Θ contient au moins une composante irréductible qui n'est pas un translaté d'une sous-variété abélienne, ceci exclut le cas (3). Si $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ où $\Theta_i = x_i + \Theta_{\text{class}}$ est un translaté de Θ_{class} avec $x_i \in J_1(k)$ un point fermé. Comme Θ est symétrique et réduit, $x_1 = -x_2$ et x_i n'est pas un point d'ordre 2. Montrons que ceci entraîne que B n'est pas stable. En fait, notons S_{X_1} l'espace de modules des fibrés semi-stables de rang 2 et de déterminant $\Omega^1_{X_1/k}$. Rappelons qu'on a l'identification $\phi : S_{X_1} \to |2\Theta_{\text{class}}|$ qui envoie $E \in S_{X_1}$ sur le diviseur thêta associé à E [33]. De plus, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} J_1 \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "K_{X_1}"'] & S_{X_1} \arrow[d, "\phi"] \\ & {|2\Theta_{\text{class}}|} \end{tikzcd}$$

dans lequel $K_{X_1} : J_1 \to |2\Theta_{\text{class}}|$ est défini par $a \mapsto (a+\Theta_{\text{class}})+(-a+\Theta_{\text{class}})$, et $b : J_1 \to S_{X_1}$ est la flèche naturelle associée au faisceau $(\mathcal{P} \otimes \delta) \oplus (\mathcal{P}^{-1} \otimes \delta)$ avec $\mathcal{P}$ un faisceau de Poincaré de X_1 et δ une caractéristique thêta de X_1. Alors K_{X_1} induit une immersion fermée $J_1/\{\pm 1\} \to |2\Theta_{\text{class}}|$. Comme $\Theta = (x + \Theta_{\text{class}}) + (-x + \Theta_{\text{class}}) = K_{X_1}(x) = \phi(b(x))$, $B = b(x)$ est donc un fibré non-stable, ce qui nous donne une contradiction. Ceci exclut le cas (2). Donc d'après le théorème précédent, Θ est irréductible, donc intègre. □

4.3.3 Lien avec les variétés de Prym

On suppose $p = 3$. On considère une courbe lisse X/k de genre 2, tel que Θ soit lisse sur k, ce qui est réalisé si X est assez générale. Par suite, Θ/k est une courbe lisse de genre 5, et $\mathcal{Q}$ est inversible sur Θ (Théorème 4.3.2.1). Notons J_1 la jacobienne de X_1. Alors Θ se descend en un diviseur de Cartier effectif D sur la variété de Kummer associée a J_1. Comme Θ est lisse, il ne passe pas par un point d'ordre divisant 2 de J_1. Donc D est une courbe lisse connexe de genre 3 de la surface de Kummer, et $\pi : \Theta \to D$ est un revêtement étale de degré 2. Soient $\mathrm{Nm} : J_\Theta \to J_D$ le morphisme de norme, et $P := (\ker(\mathrm{Nm}))^\circ$ la variété de Prym associée, qui est une variété abélienne de dimension 2 sur k. Alors $\ker(\mathrm{Nm})/P \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ [32].

Comme le morphisme naturel $J_1^\vee \to J_\Theta$ est une immersion fermée,[1] et que $J_1^\vee \subset \ker(\mathrm{Nm})$, on a $P = J_1^\vee$. Par ailleurs, d'après § 1.2.4, on a un isomorphisme $(-1)^*\mathcal{Q}\otimes\mathcal{Q} \simeq \omega_\Theta$ avec $\omega_\Theta = \mathcal{O}_{J_1}(\Theta)|_\Theta$ le faisceau canonique de Θ. Soit θ un diviseur thêta classique *symétrique* de J_1, et posons $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}\otimes(\mathcal{O}_{J_1}(-\theta)|_\Theta)$, alors $(-1)^*\mathcal{Q}'\otimes\mathcal{Q}' \simeq \mathcal{O}_\Theta$ (Proposition 1.2.3). Donc $\mathcal{Q}' \in \ker(\mathrm{Nm})$.

Proposition 4.3.1 *Avec les hypothèses ci-dessus, le faisceau $\mathcal{Q}'$ est dans la composante connexe de* $\ker(\mathrm{Nm})$ *qui n'est pas la composante neutre.*

Démonstration Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, strictement hensélien, de point générique η et de point fermé s. Soit $\mathcal{X}/S$ une courbe propre lisse sur S, dont la fibre spéciale est X (a un changement de base sur k près), et dont la fibre générique est la courbe générique de genre 2. Soient $\mathcal{B}$ le faisceau des formes différentielles localement exactes de $\mathcal{X}$, $\Theta_\mathcal{B}$ le diviseur thêta (relatif) associé à $\mathcal{B}$. Notons comme avant $\mathcal{Q}_\mathcal{B}$ le faisceau sur $\Theta_\mathcal{B}$ à partir de $\mathcal{B}$ après un choix d'une section de $\mathcal{X}/S$ (§ 1.2.4). Soit $\mathcal{J}_1$ la jacobienne de $\mathcal{X}/S$. Comme $\Theta_\mathcal{B}$ est totalement symétrique (1.2.3.3), il se descend en un diviseur $\mathcal{D}$ sur la surface de Kummer $\mathcal{S}$ associée à $\mathcal{J}_1$. Par l'hypothèse, le schéma $\Theta_\mathcal{B}$ est lisse sur S, donc $\Theta_\mathcal{B}$ ne passe pas par un point d'ordre divisant 2. Ceci entraîne que $\mathcal{D}$ est lisse sur S, et que le morphisme $\Theta_\mathcal{B} \to \mathcal{D}$ est fini étale de degré 2. Comme $g = 2$ et $p = 3$, $\Theta_\mathcal{B}/S$ (resp. $\mathcal{D}/S$) est une courbe relative de genre 5 (resp. de genre 3). Soit $J_{\Theta_\mathcal{B}}$ (resp. $J_\mathcal{D}$) la jacobienne de $\Theta_\mathcal{B}$ (resp. de $\mathcal{D}$). On a un morphisme naturel $\mathrm{Nm} : J_{\Theta_\mathcal{B}} \to J_\mathcal{D}$. Soit $P := (\ker(\mathrm{Nm}))^\circ$ la variété de Prym associée à $\Theta_\mathcal{B} \to \mathcal{D}$. Alors P est un schéma abélien sur S de dimension relative 2, et $\Pi := \ker(\mathrm{Nm})/P \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ d'après la théorie des variétés de Prym.

Par ailleurs, le morphisme naturel $\mathcal{J}_1^\vee \to J_{\Theta_\mathcal{B}}$ est une immersion fermée, par suite $\mathcal{J}_1^\vee = P$. Notons $\Theta_{\mathrm{class,sym}}$ un diviseur thêta classique symétrique de $\mathcal{J}_1$, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{J}_1}(\Theta) = \mathcal{O}_{\mathcal{J}_1}(2\Theta_{\mathrm{class,sym}})$. Donc $(-1)^*\mathcal{Q}_\mathcal{B}(-\Theta_{\mathrm{class,sym}}) \otimes \mathcal{Q}_\mathcal{B}(-\Theta_{\mathrm{class,sym}}) \simeq \mathcal{O}_{\Theta_\mathcal{B}}$ (1.2.4). Par conséquent, $\mathcal{Q}'_\mathcal{B} := \mathcal{Q}_\mathcal{B}(-\Theta_{\mathrm{class,sym}})$ est un faisceau inversible de degré 0 sur S, donc il appartient à $J_{\Theta_\mathcal{B}}$. En effet, comme $(-1)^*\mathcal{Q}'_\mathcal{B} \otimes \mathcal{Q}'_\mathcal{B} \simeq \mathcal{O}_{\Theta_\mathcal{B}}$, il appartient à $\ker(\mathrm{Nm})$. Comme $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}\eta}$ donc $\mathcal{Q}'_{\mathcal{B}\eta}$ ne provient pas d'un faisceau inversible sur $\mathcal{J}_{1,\eta}$ (Proposition 3.3.1.1), le morphisme naturel $S \to \ker(Nm) \to \Pi$ induit par $\mathcal{Q}'_\mathcal{B}$ n'est pas la section nulle. Comme S est connexe, ce qui implique que $\mathcal{Q}_{\mathcal{B},s} \notin \mathcal{J}_{1,s}^\vee$. D'où le résultat. □

Remarque 4.3.2 On sait comment décrire le faisceau $\mathcal{Q}$ dans ce cas. En fait, $\mathcal{Q}$ est seulement défini a une tensorisation près avec un faisceau inversible algébriquement trivial qui provient d'un faisceau inversible de la jacobienne. Il suffit donc de caractériser l'image de $\mathcal{Q}(-\Theta_{\mathrm{class,sym}})$ dans J_Θ/J_1. Et d'après la preuve de la proposition ci-dessus, on peut caratériser $\mathcal{Q}$ comme le faisceau qui appartient à la composante connexe de $\ker(Nm)/J_1 \subset J_\Theta/J_1$ autre que la composante neutre. Avec ce résultat, et en appliquant la transformation de Fourier-Mukai inverse, on peut retrouver le faisceau B et la courbe X à partir de la variété abélienne J_1 et du diviseur $\Theta \subset J_1$.

5 Groupe fondamental et diviseur thêta

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X/k une courbe propre lisse connexe. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X, on note $\pi_1(X, \bar{x})$ le groupe fondamental

[1] Cet énoncé est du type "Lefschetz" (SGA2 [13]). Il n'est pas automatique pour toute surface en caractéristique $p > 0$, par suite du défaut de validité du "vanishing de Kodaira", mais ne pose pas de problème pour les surfaces abéliennes.

de X associé à x. Par définition ([12], exposé V), $\pi_1(X, \bar{x})$ classifie les revêtements finis étales de X. De plus, soit $\bar{x}'$ un autre point géométrique de X, il existe un isomorphisme $\pi_1(X, \bar{x}) \simeq \pi_1(X, \bar{x}')$. Donc, s'il n'y a pas de besoin de préciser le point géométrique, on note simplement $\pi_1(X)$ le groupe fondamental de X.

Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est mal connu. Concernant sa variation dans l'espace de modules des courbes [37,40,44], le résultat le plus frappant est le suivant dû à A. Tamagawa.

Théorème (Tamagawa [44]) *Soient $S = \mathrm{Spec} k[[T]]$ de point générique η, et de point spécial s, X/S une courbe relative propre et lisse, de genre $g \geq 2$, dont la fibre spéciale X_s est définissable sur un corps fini. Alors si le morphisme de spécialisation* $\mathrm{sp} : \pi_1(X_{\bar{\eta}}) \to \pi_1(X_{\bar{s}})$ *est bijectif, la courbe relative X/S est constante.*

La démonstration de ce théorème utilise le diviseur Θ, mais celui-ci ne permet de contrôler qu'un certain quotient métabélien du π_1, a savoir $\pi_1^{\mathrm{new,ord}}$ (on renvoye à [40] pour la définition de $\pi_1^{\mathrm{new,ord}}$, et la relation entre Θ et $\pi_1^{\mathrm{new,ord}}$). On peut se demander si l'analogue du résultat de Tamagawa est encore vrai quand on remplace le π_1 par son quotient $\pi_1^{\mathrm{new,ord}}$. En fait, on est très loin de pouvoir répondre à cette question faute de renseignements suffisants sur la géométrie de Θ et sur la "saturation" de la torsion. Toutefois, on donne une réponse positive lorsque la fibre spéciale X_s est supersingulière.

Plus précisément, soient S le spectre d'un anneau de valuation discrète, strictement hensélien, de point fermé s et de point générique η, X/S une S-courbe propre lisse à fibres géométriques connexes. On a, d'après Grothendieck, un morphisme surjectif de spécialisation $\mathrm{sp} : \pi_1(X_{\bar{\eta}}) \to \pi_1(X_{\bar{s}})$. Il induit un morphisme de spécialisation sur $\pi_1^{\mathrm{new,ord}}$. La question suivante se pose naturellement:

Question 5.1 Gardons les notations ci-dessus. On suppose que X_s est définissable sur un corps fini, et que le morphisme de spécialisation:

$$\mathrm{sp} : \pi_1^{\mathrm{new,ord}}(X_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^{\mathrm{new,ord}}(X_{\bar{s}})$$

est bijectif. Alors X est-elle constante?

Commençons par traduire cette question au moyen de Θ.

Définition 5.2 Soit A une variété abélienne sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $x \in A$ un point de A d'ordre n premier à o, on note $\mathrm{Sat}(x)$ l'orbite de x sous l'action naturelle du groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ des unités de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. De plus, soit X un ensemble de points de p'-torsion, on note $\mathrm{Sat}(X) = \cup_{x \in X} \mathrm{Sat}(x)$.

Pour tout $n > 0$ entier tel que $(n, p) = 1$, les points de n-torsion de J_1 sont décomposés sur S. Donc le morphisme de spécialisation $\eta \to s$ induit une bijection sur les points de p'-torsion $J_{1,\eta}\{p'\} \simeq J_{1,s}\{p'\}$ (pour une variété abélienne A/k dont les points de p'-torsion sont décomposés, on note $A\{p'\}$ l'ensemble des points de p'-torsion de A). Sous cette identification, on a $\Theta_\eta\{p'\} := \Theta_\eta \cap J_{1,\eta}\{p'\} \subset \Theta_s\{p'\} := \Theta_s \cap J_{1,s}\{s\}$. Par suite, $\mathrm{Sat}(\Theta_\eta\{p'\}) \subset \mathrm{Sat}(\Theta_s\{p'\})$. L'observation suivante est importante dans les applications de Θ à l'étude de la variation de π_1.

Proposition 5.3 ([40], proposition 2.2.4) *Soit X une courbe propre et lisse sur S, à fibres géométriques connexes telle que les points de p'-torsion de la jacobienne J_1 de X_1 soient constants. Alors pour que le morphisme de spécialisation*

$$\mathrm{sp} : \pi_1^{\mathrm{new,ord}}(X_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^{\mathrm{new,ord}}(X_{\bar{s}})$$

soit un isomorphisme, il faut et il suffit que sp *induise une bijection* $\mathrm{Sat}(\Theta_\eta\{p'\}) \simeq \mathrm{Sat}(\Theta_s\{p'\})$.

Donc l'étude de la variation de $\pi_1^{\text{new,ord}}$ est ramenée à l'étude de la variation de la saturation des points de p'-torsions de Θ.

Rappels et notations. Soit k un corps algébriquement clos.

(1) Soit $k \subset K$ une extension de corps, et soit A/K une variété abélienne. Il existe une plus grande sous-variété abélienne B de A, appelée *la k-partie fixe* ou *la k-trace*, qui est isogène a une variété abélienne définie sur k. Le "supplémentaire" C de B dans A est *la k-partie mobile*.
(2) On dit qu'une sous-variété fermée $X \subset A$ est *de p'-torsion* si $X\{p'\} := X \cap A\{p'\}$ est dense dans X.
(3) On dit que A est *supersingulière*, si A est isogène à un produit de courbes elliptiques supersingulières. Si X est une courbe lisse, on dit que X est *supersingulière* si sa jacobienne J_X l'est.

Théorème 5.4 *Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement hensélien (de caractéristique $p > 0$), de point fermé s et de point générique η. Soit X/S une S-courbe propre lisse, à fibres géométriques connexes de genre $g \geq 2$. Notons J/S la jacobienne de X/S, $\Theta \subset J_1$ le diviseur thêta. Supposons que X_s soit une courbe supersingulière définissable sur un corps fini, et que le morphisme de spécialisation*

$$\mathrm{sp} : \pi_1^{\text{new,ord}}(X_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^{\text{new,ord}}(X_{\bar{s}})$$

soit un isomorphisme. Alors X est constante.

Lemme 5.5 *Soient k un corps algébriquement clos, C/k une courbe projective lisse connexe. Supposons qu'une composante irréductible Θ_i de Θ_C soit de p'-torsion, et soit translatée d'une hypersurface abélienne H. Notons E la courbe elliptique J_{C_1}/H, et soit $a \in J_{C_1}$ tel que $\Theta_i = a + H$. Notons a' l'image de a dans E. Alors si E est ordinaire, $a' \neq 0$.*

Démonstration Notons V_H (resp. V_J) le Verschiebung de H (resp. de $J := J_{C_1}$). Alors si $E := J/H$ est ordinaire, $\ker(V_H) = \ker(V_J)$. Supposons que $a' = 0$, en d'autres termes, $\Theta_i = H$. En particulier, $\ker(V_J) = \ker(V_H) \subset \Theta_i \subset \Theta_C$, on obtient donc une contradication avec la propriété de Dirac (1.2.7.7), d'où le résultat. □

Le lemme ci-après est le point clé où l'on utilise la supersingularité pour contrôler la saturation de la p'-torsion.

On dit qu'une composante irréductible d'un diviseur dans une variété abélienne est *abélienne* si elle est une translatée d'une hypersurface abélienne.

Lemme 5.6 *Soient $k = \overline{\mathbf{F}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$, C/k une courbe lisse connexe projective* supersingulière. *Soient $Y \subset \Theta$ un sous-ensemble fermé de Θ tel que* $\mathrm{Sat}(\Theta\{p'\}) = \mathrm{Sat}(Y\{p'\})$. *Notons D la réunion (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit) des composantes de Θ autre que les composantes abéliennes non principales (1.3.3) de Θ. Alors $D \neq \emptyset$, et D est aussi ample.*

Démonstration On raisonne par l'absurde. Si D n'est pas ample, comme J est supersingulière, il existe une courbe elliptique E de J qui laisse D stable par translations. Notons $\pi : A \to J/E =: B$ la projection naturelle ($J = J_{C_1}$ la jacobienne de C_1). Et soit Δ le diviseur de B tel que $D' = \pi^*(\Delta)$. Notons Θ' la réunion des composantes abéliennes de Θ qui ne passent pas par l'origine. Alors $\mathrm{Sat}(\Theta')$ est encore une réunion finie de translatées d'hypersurfaces abéliennes. Ecrivons

$$\mathrm{Sat}(\Theta') = \mathrm{Sat}_1 \cup \mathrm{Sat}_2,$$

où Sat_1 est la réunion des composantes de $\mathrm{Sat}(\Theta')$ qui sont laissées stable par E. Alors $\pi|_{\mathrm{Sat}_2} : \mathrm{Sat}_2 \to B$ est un morphisme fini surjectif, et il existe un diviseur Δ_1 de B tel que $\mathrm{Sat}_1 = \pi^*(\Delta_1)$. La réunion des composantes principales de Θ est ample (1.2.7.6). Il existe donc une composante Θ_i de Θ telle que $\pi|_{\Theta_i} : \Theta_i \to B$ soit surjectif. Puisque Θ_i est principal, elle n'est pas contenue dans $\mathrm{Sat}(\Theta')$. On peut donc trouver un ouvert non-vide $V \subset B$, tel que $V \cap (\Delta \cup \Delta_1) = \emptyset$, et que pour tout $b \in V$, on ait $\pi^{-1}(b) \cap \Theta_i \not\subseteq \pi^{-1}(b) \cap \mathrm{Sat}_2$. Notons Y' la réunion des composantes irréductibles de Y qui ne sont pas composantes de Sat_2. Et notons $G = \pi(Y')$. Alors G est un fermé de B tel que $G \neq B$. Posons $G' = G \cup \Delta \cup \Delta_1$. C'est un fermé propre de B. Il existe donc $b \in V(k)$ tel que $b \notin \mathrm{Sat}(G')$ (lemme 4.3.5 de [38]). Soit $a \in \Theta_i$ tel que $\pi(a) = b$. Comme $\mathrm{Sat}(\Theta) = \mathrm{Sat}(Y)$, il existe $a' \in Y$ tel que $a \in \mathrm{Sat}(a')$. Comme $\pi(a) \notin \mathrm{Sat}(G')$, on a $\pi(a') \notin \mathrm{Sat}(G')$. Donc $a' \in \mathrm{Sat}_2$, d'où $a \in \mathrm{Sat}_2$ (car Sat_2 est saturé). On en déduit que $\pi^{-1}(b) \cap \Theta_i \subset \mathrm{Sat}_2$, ceci nous donne une contradiction avec la définition de V, et finit donc la démonstration. □

Pour montrer le Théorème 5.4, rappelons d'abord, d'après Hrushovski, la structure d'une sous-variété de p'-torsion d'une variété abélienne.

Définition 5.7 [40] Soient K une extension de $\overline{\mathbf{F}_p}$, A une variété abélienne sur K.

(1) On dit que A est constante (resp. constante a isogénie près) si A est isomorphe (resp. isogène) a une variété abélienne définissable sur $\overline{\mathbf{F}_p}$.
(2) Lorsque A est constante a isogénie près, on dit qu'une sous-variété fermé $Z \subset A$ est constante à isogénie près s'il existe une isogénie $u : A_o \times_{\overline{\mathbf{F}_p}} K \to A$ avec A_o une variété abélienne sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, et si Z est l'image par u d'une sous-variété réduite Z_o de $A_o \times_{\overline{\mathbf{F}_p}} K$ qui est définie sur $\overline{\mathbf{F}_p}$.

Théorème 5.8 (Hrushovski [20]) *Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ qui contient une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}_p}$ de $\mathbf{F}_p$, A une K-variété abélienne, X un K-sous-schéma fermé de A, intègre, tel que l'ensemble des points de X de p'-torsion soit Zariski dense dans X. Notons B le plus grand sous-schéma abélien de A qui laisse stable X et soit C la ($\overline{\mathbf{F}_p}$-)partie fixe de A/B. Alors X est le translaté par un point de p'-torsion d'une sous-variété de p'-torsion à isogénie près de C.*

Remarque 5.9 La preuve d'Hrushovski utilise la théorie des modèles. R.Pink et D. Rössler donnent dans [36] une autre preuve dans le language de la géométrie algébrique.

Démonstration du Théorème 5.4 Notons D contenu dans J_s introduit dans le Lemme 5.6. Alors D est ample. Soit D'_η la réunion des composantes $\Theta_{i,\eta}$ de Θ_η qui sont de p'-torsion et dont l'adhérence schématique Θ_i a une fibre spéciale ayant au moins une composante contenue dans D. Donc D'_η est ample (5.6). Soit $D'_{i,\eta} = a_\eta + H_\eta$ une composante abélienne de D'_η, son adhérence schématique s'écrit $\overline{D'_{i,\eta}} = a + H$, avec $H = \overline{H_\eta}$. Par définition de D, $a_s + H_s$ est principal, donc $a_s \in H_s$, d'où $a \in H$. Donc $E := J/H$ est supersingulière (5.5). Notons M_η la partie mobile de J_η. On sait donc que $D'_{i,\eta}$ est trivial sur M_η. Soit $D'_{j,\eta}$ une composante non abélienne de D'_η, d'après Hrushovski (5.8), $D'_{j,\eta}$ est l'image réciproque d'un diviseur de la partie fixe de J_η, est donc aussi trivial sur M_η. Finalement D'_η est à la fois ample et trivial sur M_η, donc $M_\eta = 0$. En d'autre terme, la partie fixe de J_η est égale a J_η.

Soit ensuite Θ'_η la réunion des composantes irréductibles de p'-torsion. Par 5.6, le diviseur Θ'_η est ample. Comme J_η/η est égale à sa partie fixe, il existe $\phi : A \to J_\eta$ une η-isogénie de variétés abéliennes avec A une variété abélienne constante, telle que $N := \ker(\phi)$ est un groupe radiciel. On va montrer que N est constant. Sinon, notons $D' := \phi^*\Theta'_\eta$ l'image réciproque de Θ'_η dans A. Alors D' est un diviseur constant de p'-torsion. Soit G le plus grand sous-schéma en groupes radiciel de A qui laisse stable D'. Le fait que D' est constant implique que G l'est aussi. Et par définition de D', on a $N \subset G$. Puisque N n'est pas constant, $G' := G/N$ est un groupe radiciel non trivial. Donc Θ'_η peut se descendre en un diviseur Δ sur J_η/G'. Or le nombre d'intersection (Δ^g) est $\geq g!$, il en résulte que $(\Theta'^g_\eta) \geq p^g g!$, mais comme Θ_η est algébriquement équivalent à $p-1$ fois le diviseur thêta classique (1.2.3), on a $(\Theta'^g_\eta) \leq (\Theta^g_\eta) = (p-1)^g g!$. On obtient donc $p^g \leq (p-1)^g$, d'où une contradiction. Par conséquent, le groupe radiciel N est en fait constant. En particulier, J_η est constante, ce qui implique que le groupe de Néron-Severi de J_η est un groupe étale consant. Donc sa polarisation principale définie par le diviseur thêta classique est aussi constante (à équivalence algébrique près). Finalement, il suffit d'utiliser le théorème de Torelli [35] pour conclure que X/S est constante. □

Remarque 5.10 Revenons à la question 5.1. La réponse serait positive si les deux conditions suivantes étaient satisfaites:

(C1): Pour C une courbe lisse projective connexe de genre $g \geq 2$, le diviseur Θ ne contient pas de composantes abéliennes.

(C2): Soient A une variété abélienne sur une clôture du corps premier, D diviseur ample de p'-torsion, et F un fermé de D tel que $\mathrm{Sat}(F) = \mathrm{Sat}(D)$. Alors la réunion des composantes de D contenues dans F est un diviseur ample.

En fait, soit Θ'_η la réunion des composantes de p'-torsion, il résulte alors de (C1) et (C2) que Θ'_η est ample. Ensuite, d'après Hrushovski et par (C1), J_η est égale à sa partie fixe. On conclut que J, et puis X sont constantes par le môme argument que dans le cas supersingulier.

Acknowledgments Je suis très reconnaissant à M. Raynaud, qui m'a proposé ce sujet. Je remercie aussi O. Debarre pour une simplification de la preuve du Lemme 1.2.6.1 et pour sa longue liste de commentaires. Je remercie enfin le(a) referee pour sa lecture attentive et ses remarques.

Références

1. Beauville, A.: Vector bundles on curves and theta functions, in Moduli spaces and arithmetic geometry (Kyoto 2004). Adv. Stud. Pure Math. **45**, 145–156 (2006)
2. Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M.: Néron models, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3. Springer, Berlin (1990)
3. Bouw, I.: The p-rank of Curves and Covers of Curves, in Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, vol. 187. Birkhauser, Boston (2000)
4. Brambila-Paz, L., Grzegorczyk, I., Newstead, P.E.: Geography of Brill-Noether loci for small slopes. J. Algebraic Geom. **6**, 645–660 (1997)
5. De Jong, A.J.: Smoothness, semi-stability and alterations. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **83**, 51–93 (1996)
6. Deligne, P., Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **34**, 75–110 (1969)
7. Demazure, M., Gabriel, P.: Groupes algébriques, tom I, MASSON et CIE. Paris North-Holland, Amsterdam
8. Eisenbud, D.: Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150. Springer, Berlin (1994)
9. Ekedahl, T.: The Action Of Monodromy On Torsion Points of Jacobians, in Arithmetic Algebraic Geometry (Texel, 1989), vol. 41–49. Birkhäuser Boston, Boston (1991)
10. Fantechi, B., Göttsche, L.: Local properties and Hilbert schemes of points, Part 3. In: Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA Explained, vol. 139–178. American Mathematical Society (2007)
11. Grothendieck, A.: Eléments de géométrie algébrique II, III, IV, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1961–1967)

12. Grothendieck, A.: Revêtements étales et groupe fondamental, vol. 224, Springer, Berlin (1971)
13. Grothendieck, A.: Cohomologie locale des faisceaux cohérents, Augmenté d'un exposé par Michèle Raynaud, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 2. North-Holland Publishiing Co., Amsterdam (1968)
14. Grothendieck, A.: Schémas en groupes I, vol. 151. Springer, Berlin (1970)
15. Grothendieck, A.: Cohomologie l-adique et fonction L, vol. 589. Springer, Berlin (1977)
16. Grothendieck, A.: Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV. Les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, vol 6, Exp. No. 221. Soc. Math. France., Paris (1995)
17. Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, Berlin (1977)
18. Hartshorne, R.: Residues and Duality, vol. 20. Springer, Berlin (1966)
19. Hirschowitz, A.: Problèmes de Brill-Noether en rang supérieur, disponible depuis la page web: http://math1.unice.fr/~ah/
20. Hrushovski, E.: The Mordell-Lang conjecture for function fields. J. Am. Math. Soc. **9**, 667–690 (1996)
21. Joshi, K.: Stability and locally exact differentials on a curve. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338**, 869–872 (2004)
22. Katz, N., Mazur, B.: Arithmetic Moduli of Elliptic Curves, vol. 108. Princeton University Press, New Jersey (1985)
23. Kempf, G.: Appendix to: Varieties defined by quadratic equations, by Mumford, D., in Questions on algebraic varieties, pp. 95–100. CIME, Rome (1970)
24. Laszlo, Y.: Un théorème de Riemann pour les diviseurs thêta sur les espaces de modules de fibrés stables sur une courbe. Duke Math. J. **64**, 333–347 (1991)
25. Laumon, G.: Transformation de Fourier généralisée, arXiv:alg-geom/9603004v1
26. Milne, J.: Jacobian varieties, in Arithmetic geometry. In: Proceedings of Conference On Arithmetic Geometry, Storrs, August 1984), pp. 167–212. Springer, Berlin (1986)
27. Mori, S.: The endomorphism rings of some abelian varieties. Jpn. J. Math. (N.S.) **2**, 109–130 (1976)
28. Mukai, S.: Duality between $\mathrm{D}(X)$ and $\mathrm{D}(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves. Nagoya Math. J. **81**, 153–175 (1981)
29. Mumford, D.: Abelian Varieties, vol. 5. Tata Inst., Bombay (1970)
30. Mumford, D.: On the equations defining abelian varieties. I. Invent. Math. **1**, 287–354 (1966)
31. Mumford, D.: Theta characteristic of an algebraic curve. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **4**, 181–192 (1971)
32. Mumford, D.: Prym varieties, Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), pp. 325–350. Academic Press, New York (1974)
33. Narasimhan, M.S., Ramanan, S.: Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. Math. **89**(2), 14–51 (1969)
34. Oda, T.: Vector bundles on an elliptic curve. Nagoya Math. J. **43**, 41–72 (1971)
35. Oort, F.: Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems. Compos. Math. **23**, 265–296 (1971)
36. Pink, R., Rössler, D.: On ψ-invariant subvarieties of semiabelian varieties and the Manin-Mumford conjecture. J. Algebraic Geom. **13**, 771–798 (2004)
37. Pop, F., Saïdi, M.: On the specialisation homomorphism of fundamental groups of curves in positive characteristics. Math. Sci. Res. Inst. Publ. **41**, 107–118 (2003)
38. Raynaud, M.: Sections des fibrés vectoriels sur une courbe. Bull. Soc. Math. France **110**, 103–125 (1982)
39. Raynaud, M.: Revêtements des courbes en caractéristique $p > 0$ et ordinarité. Compos. Math. **123**, 73–88 (2000)
40. Raynaud, M.: Sur le groupe fondamental d'une courbe complète en caractéristique $p > 0$, in Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, 1999). Am. Math. Soc. **70**, 335–351 (2002)
41. Raynaud, M.: Contre-exemple au "Vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$, in C. P. Ramanujam-A Tribute, vol. 8, pp. 273–278. Tata Inst., Bombay (1978)
42. Serre, J.-P.: Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, 1958 Symposium internacional de topología algebraica, pp. 24–53. Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City
43. Szpiro, L.: Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov sur les diviseurs exceptionnels, Séminaire Bourbaki 14 (1971–1972), vol. 317. Springer, Berlin (1973)
44. Tamagawa, A.: Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups. J. Algebraic Geom. **13**, 675–724 (2004)
45. Tango, H.: On the behavior of extensions of vector bundles under the Frobenius map. Nagoya Math. J. **48**, 73–89 (1972)
46. van Geemen, B., Izadi, E.: The tangent space to the moduli space of vector bundles on a curve and the singular locus of the theta divisor of the jacobian. J. Algebraic Geom. **10**, 133–177 (2001)