2. Equations différentielles du premier ordre

Exercice 2.1 *Donner la forme générale des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.*

Exercice 2.2 *Considérons l'équation suivante*

$$y' + 5y = 3 \qquad (E)$$

(1) Donner son équation différentielle homogène associée (que l'on notera par (H)).
(2) Résoudre l'équation (H) de (1).
(3) Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble des solutions de (E).
(4) Donner la solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 2.3 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

i) $y' + 3y = 4e^x$ *avec la condition initiale* $y(0) = -2$.
ii) $y' + 3y = xe^{-x} + 5$.
iii) $3y' + 2y = 2x^3 + 14$.
iv) $y' - y = \sin x + \cos x$.

Exercice 2.4 (Variation de la constante) *Considérer l'équation différentielle*

$$y' + y = (x^2 - 1)e^x \qquad (E).$$

(1) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
(2) Supposons que l'équation (E) admet une solution particulière de la forme

$$y(x) = K(x)e^{-x}$$

avec $K(x)$ une fonction C^1. Donner une équation différentielle (E') vérifiée par $K(x)$ à partir de (E).

(3) Résoudre l'équation (E'), en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2.5 *Résoudre l'équation*

$$y' = 3y + e^{3x} \cdot \sin x.$$

Exercice 2.6 *On aimerait trouver l'ensemble des solutions de l'équation suivante :*

$$y' = a(x) \cdot y(x) + f(x) \qquad (E)$$

où $a(x)$ et $f(x)$ sont deux **fonctions** *réelles continues définies sur $\mathbf{R}$. Soit $A = A(x)$ une primitive de la fonction $a = a(x)$.*

(i) Regardons d'abord son équation homogène associée :

$$y' = a(x)y \qquad (H).$$

Soit $y = y(x)$ une solution de (H). Montrons que la fonction $x \mapsto y(x) \cdot e^{-A(x)}$ est une fonction constante (indication : la fonction $x \mapsto y(x)e^{-A(x)}$ est dérivable, donc pour vérifier que cette fonction est constante, il suffit de prouver que sa dérivation est toujours zéro). En déduire $S_H = ?$

(ii) Soit y_p une solution particulière de (E). Décrire l'ensemble des solutions S_E de (E) (en terme de y_p et de S_H).

Exercice 2.7 *Résoudre les équations suivantes :*

– $y' = x^2y$ *avec* $x \in \mathbf{R}$;

– $y' = y \cdot \sin x$ *avec* $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 2.8 *(i) Trouver une solution particulière* $y_p = y_p(x)$ *de l'équation suivante*

$$y' = y \cdot \sin x + \sin x, \qquad (E)$$

qui est de la forme $y_p(x) = K(x)e^{-\cos x}$ *(avec* $K = K(x)$ *une fonction dérivable).*

(ii) Trouver la solution de (E), qui satisfait à la condition initiale suivante : $y(\pi/2) = 2$.

Exercice 2.9 (Décroissance radioactive) *Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre* $Q(t)$ *d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction* Q *est donc solution de l'équation différentielle*

$$y' = -\mu y$$

où μ *est une constante propre à la substance radioactive.*

i) *On appelle* temps de demi-vie *pour une substance radioactive le temps* T *nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant* T *et* μ.

ii) *Pour le carbone 14,* T *est de 5700 ans, que vaut approximativement* μ *?*

iii) *L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaitre que l'arbre ne contient plus que 40 % du carbone 14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone 14).*

iv) *Même question avec une analyse plus fine qui donne 42 % ?*

Exercice 2.10 (Loi de refroidissement de Newton) *Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement ...) suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité* k *dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu (on le considèrera constant). On note* $T(t)$ *la température de l'objet à l'instant* t.

i) *Donner l'équation différentielle dont est solution la fonction* T *si l'on suppose que le milieu ambiant est à température constante* T_a.

ii) *Déterminer* $T(t)$ *si l'objet possède une température initiale* $T(0) = T_0$.

iii) *On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps (par exemple cas du sol exposé aux rayons du soleil). Déterminer* $T(t)$ *lorsque* $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$.

Jilong TONG jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr
Université de Bordeaux 1