SVE 101 TD 3

3.1

i) $y'' + 2y' - 3y = -t + 1 \quad (E)$

- résoudre d'abord son équation homogène associée

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (H)$$

son équation caractéristique :

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

a deux racine réelles différentes -3, 1

donc $$S_E = \{ k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t} \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$$

- on cherche une solution particulière de (E)

puisque le second membre de l'équation (E) (c'est-à-dire, la fonction $t \longmapsto -t+1$) est un polynôme de degré 1

d'après le tableau $\Rightarrow$ $\exists$ une solution particulière de la forme suivante.

$y_p(t) = Q(t)$ avec $Q(t)$ un polynôme de degré 1.

posons $Q(t) = at + b$ avec a, b deux coefficients à determiner

or $y_p'(t) = a$, $y_p''(t) = 0$

donc $y_p''(t) + 2y_p'(t) - 3y_p(t)$

$= 2a - 3(at+b) = -3at + (2a - 3b)$

donc : la fonction $y_p = y_p(t) = at + b$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow$ $y_p''(t) + 2y_p'(t) - 3y_p(t) = -t + 1$

$\Leftrightarrow$ $-3at + (2a - \cancel{b}^{\,3b}) = -t + 1$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -3a = -1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$

par conséquent, la fonction $y_p(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$ est une solution particulière de (E)

on obtient ainsi

$$S_E = \left\{ \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t} \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- finalement, on cherche les solutions de (E), vérifiant les conditions initiales.

$$\begin{cases} y_p(0) = 0 \\ y_p'(0) = 1 \end{cases}$$

c-a-d, il faut trouver des k_1, k_2 tq.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t}\right)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{9} + k_1 + k_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t}\right)'\Big|_{t=0} = \frac{1}{3} - 3k_1 + k_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = \frac{1}{9} \\ 3k_1 - k_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{5}{36} \\ k_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

donc, la solution de l'équation avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = -t + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

est la fonction suivante :

$$y(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} - \frac{5}{36}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}.$$

ii) $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (E)

- on résout d'abord l'équation homogène associée :

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (H).$$

son équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$, qui admet deux racines réelles différentes : -3 et 1.

d'où $S_H = \{ k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t} \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

- on cherche une solution particulière de (E)

comme le second membre $f(t) = e^{2t}$ est une fonction exponentielle, d'après le tableau, il existe une solution particulière de la forme suivante

$y_p(t) = C e^{2t}$ (car 2 n'est pas une racine de l'équation caractéristique de (E))

(C à determiner)

or $y_p'(t) = 2Ce^{2t}$

$y_p''(t) = 4Ce^{2t}$

d'où $y_p''(t) + 2y_p'(t) - 3y_p(t) = 4Ce^{2t} + 4Ce^{2t} - 3.(C.e^{2t})$

$= 5Ce^{2t}$

donc la fonction $y_p(t) = Ce^{2t}$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow \quad y_p''(t) + 2y_p'(t) - 3y_p(t) = e^{2t}$

$\Leftrightarrow \quad 5Ce^{2t} = e^{2t}$

$\Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{5}$

on obtient ainsi une solution particulière de (E) :

$$y_p(t) = \frac{1}{5} e^{2t}$$

d'où $S_E = \{ \frac{1}{5} e^{2t} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t} \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

(4)

- on tient compte maintenant des conditions initiales :

~~C'est~~ C'est-à-dire, il faut trouver les coefficients k_1, k_2 tq

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5}e^{2t} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t}\right)_{|t=0} = 0 \\ \left(\frac{1}{5}e^{2t} + k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t}\right)'_{|t=0} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} + k_1 + k_2 = 0 \\ \frac{2}{5} - 3k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = -\frac{1}{5} \\ -3k_1 + k_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{5} \\ k_2 = 0 \end{cases}$$

d'où la ~~condit~~ solution de l'équation (E) avec des conditions initiales

$$y_p(t) = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

(ii). $y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$ (E)

- on résout d'abord son équation homogène associée.

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad (H)$$

Son équation caratéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$, elle admet deux racines réelles différentes : -3, 1

d'où $S_H = \{ k_1 e^{-3t} + k_2 e^{t} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

- on cherche une solution particulière de (E).

posons $f(t) = -t + 1 + e^{2t} + \cos t = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$

avec $\begin{cases} f_1(t) = -t + 1 \\ f_2(t) = e^{2t} \\ f_3(t) = \cos t \end{cases}$

d'après le tableau,

* pour l'équation $y'' + 2y' - 3y = f_1(t)$ (E_1), elle a une solution particulière sous la forme suivante.

$$y_1(t) = Q(t) \quad \text{avec } Q(t) \text{ un polynôme de degré } 1$$

* pour l'équation $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (E_2), elle a une solution particulière sous la forme suivante.

$$y_2(t) = C \cdot e^{2t}.$$

* pour l'équation $y'' + 2y' - 3y = \cos t$ (E_3), elle a une solution particulière sous la forme suivante. (car $\sqrt{-1}$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (E_1))

$$y_3(t) = A\cos t + B\sin t.$$

Donc, d'après le principe de superposition, l'équation (E):

$$y'' + 2y' - 3y = f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = -t+1 + e^{2t} + \cos t$$

admet une solution particulière sous la forme suivante.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$
$$= Q(t) + Ce^{2t} + (A\cos t + B\sin t)$$

où $Q(t)$ est un polynôme de degré 1,

posons $Q(t) = at + b$

donc $\exists$ une solution de (E) sous la forme suivante.

$$y(t) = at + b + Ce^{2t} + (A\cos t + B\sin t)$$

avec a, b, C, A, B coefficients à determiner.

or $y'(t) = a + 2Ce^{2t} - A\sin t + B\cos t$

$y''(t) = 4Ce^{2t} - A\cos t - B\sin t$

$\Rightarrow y''(t) + 2y'(t) - 3y(t)$

$= (4Ce^{2t} - A\cos t - B\sin t) + 2(a + 2Ce^{2t} - A\sin t + B\cos t)$

$- 3(at + b + Ce^{2t} + (A\cos t + B\sin t))$

$= -3at + (2a - 3b) + 5Ce^{2t} + (-A + 2B - 3A)\cos t$

$+ (-B - 2A - 3B)\sin t.$

donc, la fonction $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$

$$= at + b + ce^{2t} + A\cos t + B\sin t$$

est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow \quad y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$$

$$\Leftrightarrow \quad -3at + (2a - 3b) + 5ce^{2t} + 2B\cos t - 2A\sin t = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = -1 \\ 2a - 3b = 1 \\ 5c = 1 \\ -4A + 2B = 1 \\ -4B - 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \\ c = \frac{1}{5} \\ A = \cancel{0} - \frac{1}{5} \\ B = \frac{1}{10} \end{cases}$$

d'où une fonction particulière

$$y(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t .$$

$$\Rightarrow S_E = \left\{ \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t + k_1e^{-3t} + k_2e^t \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

iv) $y'' - 6y' + 9y = 3 + e^t \qquad (E)$

- résoudre d'abord son équation homogène associée

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad (H)$$

Son équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$ admet une racine double $r = 3$

donc $S_H = \left\{ (k_1 t + k_2)e^{3t} \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- recherche d'une solution particulière.

(ici, $f(x) = e^t + \underbrace{3}$ un polynôme de degré 0

d'après le tableau (et le principe de superposition)

il existe une solution sous la forme suivante :

$$y(t) = Q(t) + ce^t$$

avec $Q(t)$ un polynôme de degré 0,

posons $Q(t) = a \Rightarrow y(t) = a + ce^t$

avec a, c deux coefficients à déterminer or $y'(t) = ce^t$ $\qquad y''(t) = ce^t$

donc : $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t)$

$= ce^t - 6ce^t + 9a + 9ce^t$

$= 4ce^t + 9a$

donc : la fonction $y = y(t) = a + ce^t$ est une solution particulière de (E)

$\Leftrightarrow \quad y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 3 + e^t$

$\Leftrightarrow \quad 4ce^t + 9a = 3 + e^t$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4c = 1 \\ 9a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$

d'où une solution particulière de (E)

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^t.$$

donc : $S_E = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^t + (k_1 t + k_2)e^t \ / \ \in \mathbb{R} \right\}$

- on prend en compte maintenant les conditions initiales :

Il faut trouver les A. B tq

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^t + (k_1 t + k_2)e^t \right)\Big|_{t=0} = 0 \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^t + (k_1 t + k_2)e^t \right)'\Big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{4} + k_2 = 0 \\ \frac{1}{4} + k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

d'où la solution pour l'équation (E) avec conditions initiales

$$y(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^t + \left(t - \frac{1}{4}\right)e^t$$

#

v). $y'' - 3y' = 3 + t^2 \quad (E)$

- on résout d'abord l'équation homogène associée :

$$y'' - 3y' = 0$$

son équation caractéristique $r^2 - 3r = 0$ admet deux racines réelles différentes : 0, 3

d'où $S_H = \{ k_1 e^{0t} + k_2 e^{3t} \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ k_1 + k_2 e^{3t} \ / k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

- recherche d'une solution particulière.

puisque la fonction $t \longmapsto 3 + t^2$ est un polynôme de degré 2

~~l'éq~~ l'éq. le tableau $\Rightarrow$ il existe une solution sous la forme suivante.

$$y(t) = t \cdot Q(t)$$

avec $Q(t)$ un polynôme de degré 2.

posons, $Q(t) = at^2 + bt + c$

donc il existe une solution de (E) sous la forme

$$y(x) = t(at^2 + bt + c)$$

$= at^3 + bt^2 + ct$, avec a, b, c coeff. à determiner

or $y'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

$y''(t) = 6at + 2b$

$\Rightarrow y''(t) - 3y'(t) = (6at + 2b) - 3(3at^2 + 2bt + c)$

$= -9at^2 + (6a - 6b)t + (2b - 3c)$

donc pour que la fonction $y = y(t)$ soit une solution de (E)

il faut et il suffit $y''(t) - 3y'(t) = 3 + t^2$

$\Longleftrightarrow -9at^2 + (6a - 6b)t + (2b - 3c) = t^2 + 3$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} -9a = 1 \\ 6a - 6b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$

d'où une solution particulière :

$$y(t) = -\frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{29}{27}t$$

donc $S_E = \left\{ -\frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{29}{27}t + k_1 + k_2 e^{3t} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

vi) $y'' + y = t + \sin 2t \qquad (E)$

- on résout d'abord l'équation homogène associée

$$y'' + y = 0 \qquad (H)$$

son équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ admet deux racines complexes non réelles $\pm i$ (où i est une racine carré de -1)

d'où $S_H = \left\{ K_1 \cos t + K_2 \sin t \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- on recherche une solution particulière de (E) :

le tableau + principe de superposition (ici, $f(t) = \underbrace{t}_{\text{un polynôme de degré 1}} + \sin 2t$

$\Rightarrow$ $\exists$ une solution particulière sous la forme suivante :

$$y(t) = Q(t) + A\cos 2t + B\sin 2t$$

avec $Q(t)$ un polynôme de degré 1.

on peut supposer donc $Q(t) = at + b$

donc l'équation (E) admet une solution sous la forme suivante.

$$y(t) = at + b + A\cos 2t + B\sin 2t$$

avec a, b, A, B à determiner.

or $y'(t) = a - 2A\sin 2t + 2B\cos 2t$

$y''(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$.

donc $y''(t) + y(t)$

$= -4A\cos 2t - 4B\sin 2t + (at + b + A\cos 2t + B\sin 2t)$

$= at + b - 3A\cos 2t - 3B\sin 2t$

donc, la fonction $y(t) = at+b + A\cos t + B\sin t$ est une solution particulière de (E)

$\Leftrightarrow \quad y''(t) + y(t) = t + \sin 2t$

$\Leftrightarrow \quad at + b - 3A\cos 2t - 3B\sin 2t = t + \sin 2t$

donc, il suffit les a. b. A, B tq

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -3A = 0 \\ -3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

on obtient ainsi une solution particulière

$$y(t) = t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

d'où $S_E = \left\{ t - \frac{1}{3}\sin 2t + k_1\cos t + k_2 \sin t \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- on tient compte des conditions initiales : c'est-à-dire, il faut trouver les k_1, k_2 tq

$$\begin{cases} \left(t - \frac{1}{3}\sin 2t + k_1\cos t + k_2\sin t\right)_{|t=0} = 0 \\ \left(t - \frac{1}{3}\sin 2t + k_1\cos t + k_2\sin t\right)'_{|t=0} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ 1 - \frac{2}{3} + k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

d'où la solution

$$y(t) = t - \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin t$$

#

3.2 $y'' + 5y' - 6y = e^{2x}(x^2+1)$ (E)

i) l'équation homogène associée est la suivante

$$y'' + 5y' - 6 = 0 \qquad (H)$$

Son équation caractéristique $r^2 + 5r - 6 = (r+6)(r-1) = 0$ admet deux racines réelles, 1 et -6

d'où $S_H = \{ k_1 e^{x} + k_2 e^{-6x} \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

ii) comme $y_p = y_p(x)$ est une solution particulière de (E)

donc en particulier, la fonction

$$Q(x) = \frac{y_p(x)}{e^{2x}} = y_p(x) e^{-2x}$$ admet dérivation

du second degré.

or $y_p(x) = Q(x) e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad y_p'(x) = Q'(x) e^{2x} + 2Q(x) e^{2x}$$

$$y_p''(x) = Q''(x) e^{2x} + 2Q'(x) e^{2x} + 2Q'(x) e^{2x} + 4Q(x) e^{2x}$$
$$= Q''(x) e^{2x} + 4Q'(x) e^{2x} + 4Q(x) e^{2x}$$

donc $y_p''(x) + 5y_p'(x) - 6y_p(x)$

$$= Q''(x) e^{2x} + 4Q'(x) e^{2x} + 4Q(x) e^{2x} + 5(Q'(x) e^{2x} + 2Q(x) e^{2x})$$
$$- 6Q(x) e^{2x}$$
$$= (Q''(x) + 9Q'(x) + 8Q(x)) e^{2x}$$

donc: la fonction $y_p(x) = Q(x) e^{2x}$ est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow \quad y_p''(x) + 5y_p'(x) - 6y_p(x) = e^{2x}(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (Q''(x) + 9Q'(x) + 8Q(x)) e^{2x} = e^{2x}(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad Q''(x) + 9Q'(x) + 8Q(x) = x^2+1$$

donc: la fonction $Q = Q(x)$ satisfait à l'équation suivante

$$z'' + 9z' + 8z = x^2+1 \qquad (E')$$

iii) On résout l'équation suivante :

$$z'' + 9z' + 8z = x^2+1 \qquad (E')$$

- Son équation homogène associée :

$$z'' + 9z' + 8z = 0 \qquad (H')$$

l'équation caractéristique associée à (H') est

$$r^2 + 9r + 8 = 0 \, ;$$

qui admet deux racines réelles $-1, -8$

- On cherche une solution particulière de (E') :

tableau $\Rightarrow$ $\exists$ une solution particulière de (E') sous la forme suivante

$$z(x) = P(x)$$

avec $P(x)$ un polynôme de degré 2

On peut donc poser

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

donc l'équation (E') admet une solution particulière sous la forme suivante :

$$z(x) = ax^2 + bx + c$$

or $z'(x) = 2ax + b$

$z''(x) = 2a$

donc : $z''(x) + 9z'(x) + 8z(x)$

$= 2a + 9(2ax+b) + 8(ax^2+bx+c)$

$= 8ax^2 + (8b+18a)x + (8c+9b+2a)$

donc la fonction $z = z(x) = ax^2+bx+c$ est une solution particulière de (E')

$\Leftrightarrow$ $z''(x) + 9z'(x) + 8z(x) = x^2+1$

$\Leftrightarrow$ $8ax^2 + (8b+18a)x + (8c+9b+2a) = x^2+1$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 8a = 1 \\ 8b+18a = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{9}{32} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad S_{E'} = \left\{ \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{32}x + \frac{105}{256} + k_1 e^{-x} + k_2 e^{-8x} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(c). on obtient ainsi une solution particulière de (E)

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{32}x + \frac{105}{256} \right) e^{2x}$$

iii)

$$S_E = \left\{ \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{32}x + \frac{105}{256} \right) e^{2x} + k_1 e^{x} + k_2 e^{-6x} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

pour les conditions initiales, il faut trouver k_1, k_2 tq.

$$\begin{cases} \dfrac{105}{256} + k_1 + k_2 = 0 \\[2ex] \left[\left(\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{9}{32}x + \dfrac{105}{256} \right) e^{2x} + k_1 e^{x} + k_2 e^{-6x} \right]'_{x=0} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ - - - - - -

3.3

(1): $y'' + y' + y = x^2 e^x$ (E)

- on résout d'abord son équation homogène associée.

$$y'' + y' + y = 0 \qquad (H)$$

l'équation caractéristique associée $r^2 + r + 1 = 0$ admet deux racines complexes non réelles : $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

d'où $S_H = \left\{ (k_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + k_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) e^{-\frac{1}{2}x} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- on cherche une solution particulière de (E).

comme le second membre de (E) est $x^2 e^x$

Il existe donc une solution particulière de la forme suivante :

$y(x) = P(x) \cdot e^x$ avec $P(x)$ un polynôme de degré 2.

posons $P(x) = ax^2 + bx + c$, on aurait donc trouver a, b, c

t.q la fonction $y(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$ soit une solution de (E)

or $y'(x) = (2ax + b) \cdot e^x + (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$

$y''(x) = 2a \cdot e^x + 2(2ax + b) \cdot e^x + (ax^2 + bx + c) e^x$

$= \left[a x^2 + (4a + b) x + (2a + 2b + c) \right] e^x$

d'où $y''(x) + y'(x) + y(x)$

$= [ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) + (2ax + b) + (ax^2 + bx + c)$

$+ (ax^2 + bx + c)] e^x$

$= [3a x^2 + (6a + 3b) x + (2a + 3b + 3c)] e^x$

donc la fonction $y(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow$ $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 e^x$

$\Leftrightarrow$ $\left[3ax^2 + (6a + 3b) x + (2a + 3b + 3c) \right] e^x = x^2 \cdot e^x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 6a + 3b = 0 \\ 2a + 8b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{9} \end{cases}$$

donc : $y(x) = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9})e^x$ est une solution particulière de (E)

d'où $S_E = \left\{ (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9})e^x + (K_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2})e^{-\frac{x}{2}} \;/\; K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$

ii) $y'' + 2y' - 3y = x \sin x \quad (E)$

- on résout d'abord l'équation homogène associée :

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad (H)$$

Son équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ (c) admet deux racines réelles $1, -3$

d'où $S_H = \{ k_1 e^x + k_2 e^{-3x} \;/\; K_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

- on cherche une solution particulière de (E) :

le second membre de (E) est $x \sin x$.

comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique (c)

$\Rightarrow$ il existe une solution particulière sous la forme suivante.

$$y(x) = P(x) \cos x + Q(x) \sin x$$

avec $P(x), Q(x)$ deux polynômes de degré ≤ 1

posons $P(x) = bx + c$

$Q(x) = ex + f$

on cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y(x) = (bx + c)\cos x + (ex + f)\sin x$$

$$y'(x) = b\cos x + (bx+c)\cdot(-\sin x) + e\sin x + (ex+f)\cos x$$

$$= (ex + f + b)\cos x + (-bx - c + e)\sin x$$

$$y''(x) = e\cos x - (ex+f+b)\sin x - b\sin x + (-bx-c+e)\cos x$$

$$= (-bx - c + 2e)\cos x + (-ex - f - 2b)\sin x$$

$$\Rightarrow \quad y''(x) + 2y'(x) - 3y(x)$$

$$= \left[(-bx - c + 2e) + 2(ex+f+b) - 3(bx+c) \right]\cos x$$

$$+ \left[(-ex - f - 2b) + 2(-bx - c + e) - 3(ex+f) \right]\sin x$$

$$= \left[(2e - 4b)\,x + (-4c + 2e + 2f + 2b) \right]\cos x$$

$$+ \left[(-4e - 2b)\,x + (-4f - 2b - 2c + 2e) \right]\sin x$$

donc. la fonction $y(x) = (bx+c)\cos x + (ex+f)\sin x$

est une solution de (E)

$\Leftrightarrow \quad y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = x\sin x$

$\Leftrightarrow$ donc, il suffit de prendre b, c, e, f, tq.

$$\begin{cases} 2e - 4b = 0 \\ -4c + 2e + 2f + 2b = 0 \\ -4e - 2b = 1 \\ -4f - 2b - 2c + 2e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{10} \\ c = -\frac{7}{50} \\ e = -\frac{1}{5} \\ f = \frac{1}{50} \end{cases}$$

d'où une solution particulière:

$$y(x) = \left(-\frac{1}{10}x - \frac{7}{50}\right)\cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{1}{50}\right)\sin x$$

donc: $S_E = \left\{ \left(-\frac{1}{10}x - \frac{7}{50}\right)\cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{1}{50}\right)\sin x + k_1 e^{x} + k_2 e^{-3x} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

#

iii) $y'' + y = x e^x \quad (E)$

- Son équation homogène associée :

$$y'' + y = 0 \quad (H)$$

$$\Rightarrow \quad S_H = \{ k_1 \cos x + k_2 \sin x \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$$

- recherche d'une solution particulière de (E).

puisque 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique de (E)

$\Rightarrow$ $\exists$ solution particulière sous la forme suivante.

$$y(x) = \underbrace{(ax + b)}_{\text{un polynôme de degré } 1} \cdot e^x$$

or $\quad y'(x) = a e^x + (ax+b) e^x = (ax + b + a) e^x$

$$y''(x) = (a) e^x + (ax + b + a) e^x$$

$$= (ax + b + 2a) e^x$$

donc $\quad y''(x) + y(x) = (2ax + 2a + 2b) e^x$

donc la fonction $y(x) = (ax+b) e^x$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow \quad y''(x) + y(x) = x e^x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où une solution particulière $\quad y(x) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) e^x$

$$\Rightarrow S_E = \{ (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}) e^x + k_1 \cos x + k_2 \sin x \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$$

iv). $y'' + y = x\cos x \quad (E)$

- Son équation homogène associée est

$$y'' + y = 0 \quad (H)$$

$$\Rightarrow \quad S_H = \{ k_1 \cos x + k_2 \sin x \ / \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$$

- recherche d'une solution particulière de (E)

comme le second membre de (E) est $x.\cos x = f(x)$

et $1 \cdot i = i$ est une racine de l'équation caractéristique associée à (E)

$\Rightarrow$ il existe une ~~...~~ solution sous la forme suivante

$$y(x) = x(ax+b)\cos x + x(cx+d)\sin x$$

$$= (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x$$

or $y'(x) = (2ax+b)\cos x - (ax^2+bx)\sin x$

$$+(2cx+d)\sin x + (cx^2+dx)\cos x$$

$$= (cx^2+(d+2a)x+b)\cos x + (-ax^2+(2c-b)x+d)\sin x$$

$y''(x) = (2cx+(d+2a))\cos x - (cx^2+(d+2a)x+b)\sin x$

$$+(-2ax+(2c-b))\sin x + (-ax^2+(2c-b)x+d)\cos x$$

$$= [-ax^2+(4c-b)x+2d+2a]\cos x + [-cx^2+(-4a-d)x+2c-2b]\cdot\sin x$$

$\Rightarrow y''(x)+y(x) = (4cx+2d+2a)\cos x + (-4ax+2c-2b)\sin x$

donc pour que la fonction $y(x) = (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x$

Soit une solution de (E)

il faut et il suffit
$$\begin{cases} 4c = 1 \\ 2d+2a = 0 \\ -4a = 0 \\ 2c-2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases}$$

donc $y(x) = \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x$

d'où $S_E = \left\{ \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x + k_1\cos x + k_2\sin x \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

v).

- on résout d'abord l'équation suivante

$$y'' + y = x(\cos x + e^x) \quad (E)$$

d'après iii) (ou (iv)), son équation homogène

$$y'' + y = 0 \quad (H)$$

admet comme l'ensemble des solutions

$$S_H = \left\{ k_1\cos x + k_2\sin x \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

pour trouver une solution particulière, il suffit d'utiliser le principe de superposition, et les résultats de iii) et (iv) et on a :

la fonction

$$y(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x}_{\text{une solution de (iii)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x\right)}_{\text{une solution de (iv)}}$$

est une solution particulière de (E)

d'où

$$S_E = \left\{ \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x + \left(\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x\right) + k_1\cos x + k_2\sin x \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- on ~~résout~~ résout maintenant l'équation suivante avec des conditions initiales

$$\begin{cases} y'' + y = x(\cos x + e^x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

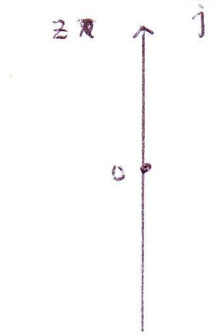
c-a-d, trouver les k_1, k_2 t.q

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + k_1 = 1 \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

d'où la solution

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)e^x + \left(\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x\right) + \frac{3}{2}\cos x + \frac{7}{4}\sin x$$

3.4



i) par définitions,

$z'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$ est la vitesse instantanée du corps à l'instant t.

et $z''(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{z'(t+\Delta t) - z'(t)}{\Delta t}$ = l'accélération instantanée du corps à l'instant t

donc $z''(t) = a(t)$

ii) En l'absence de frottement $\Rightarrow$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = -g\cdot\vec{j}$$

d'où $a(t) = -g$

donc $z''(t) = -g$

il faut maintenant résoudre l'équation suivante avec conditions initiales

$$\begin{cases} z'' = -g \\ z(0) = h \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

~~d'où~~ or l'ensemble des solutions de l'équation

$$z'' = -g \quad (E)$$

est $S_E = \left\{ -\frac{1}{2}gt^2 + at + b \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

il suffit de prendre a, b t.q

$\begin{cases} b = h \\ a = 0 \end{cases}$ donc $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

iii). par hypothèse,

$$\vec{F_e} = -m\vec{g} + \vec{F_f}$$

où $\vec{F_f}$ est la force de frottements

or $\vec{F_f}$ est propositionnelle à la vitesse

$\Rightarrow$ il existe une constante $k > 0$ t.q

$$\vec{F_f} = \underbrace{-}\, k \cdot z'(t)\, \vec{j}$$

(car la direction du vecteur $\vec{F_f}$ est toujours l'opposite de celle de la ~~vite~~ vitesse)

donc.
$$z''(t) \cdot \vec{j} = \frac{\vec{F_e}}{m} = -g \cdot \vec{j} - \frac{k\, z'(t)}{m} \vec{j}$$

d'où
$$z''(t) = -g - \frac{k}{m} z'(t) \quad (E)$$

pour la résoudre, considerons d'abord son équation homogène associée:

$$z''(t) + \frac{k}{m} z'(t) = 0 \quad (H)$$

l'équation caractéristique associée est

$$r^2 + \frac{k}{m} r = 0,$$

qui admet deux racines réelles distinctes (car $k > 0$)

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{k}{m}$$

d'où
$$S_H = \{ K_1 + K_2 e^{-\frac{k}{m}t} \ / \ K_1, K_2 \in \mathbb{R} \}$$

puis, on cherche une solution particulière.

comme le second membre de (E) est un polynôme de degré 0

tableau $\Rightarrow$ il existe une solution sous la forme

$z_p(t) = A \cdot t$ avec A à déterminer.

or $\quad z_p'(t) = A \qquad z_p''(t) = 0$

donc $\quad z_p''(t) + \frac{k}{m} z_p'(t) = \frac{A \cdot k}{m}$

donc la fonction $t \longmapsto z_p(t) = At$ est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow \quad z_p''(t) + \frac{k}{m} z_p'(t) = -g$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \frac{k}{m} = -g$$

$$\Leftrightarrow \quad A = -\frac{mg}{k}$$

d'où une solution particulière

$$z_p(t) = -\frac{mg}{k} t.$$

donc $\quad S_E = \left\{ -\frac{mg}{k} t + k_1 + k_2 e^{-\cancel{\frac{mg}{k}}\frac{k}{m}t} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(iv). $\quad z(t) = -\frac{mg}{k} t + k_1 + k_2 e^{-\frac{mg}{k}t}$

$\Rightarrow \quad z'(t) = -\frac{mg}{k} - k_2 \frac{mg}{k} e^{-\frac{mg}{k} \cdot t}$

donc $\quad V_\infty := \lim_{t \to +\infty} z'(t) = -\frac{mg}{k}$

et $\quad v(t) = z'(t) = V_\infty \left(1 + k_2 e^{-\cancel{\frac{mg}{k}}\frac{k}{m}t} \right)$

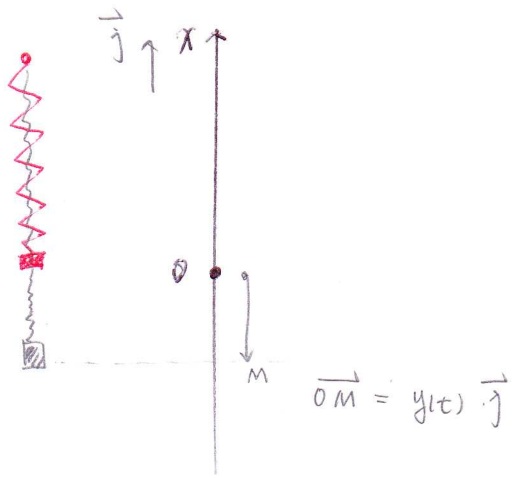
donc pour t ~~$\to \infty$~~ assez grand, la force extérieure totale ≈ 0.

$\Rightarrow$ ~~le corps~~ l'accélération du corps ≈ 0

$\Rightarrow$ le corps suite un mouvement qui est à peu près de vitesse constante

($\approx$ la ~~vitte~~ vitesse limite V_∞)

3.5.



$y(t)$ = la cote de M sur cet axe à l'instant t.

i) : <u>En l'absence de force d'excitation sur M</u>

- force d'inertie $= -m \cdot y'' \cdot \vec{j}$ (i.e. on se place à un référentiel non galiléen centré en M)
- force de viscosité $= -b \cdot y' \cdot \vec{j}$ $(b \geq 0)$
- force de rappel $= -c \cdot y \cdot \vec{j}$ $(c \geq 0)$

la force total $= -my'' \cdot \vec{j} - by'\vec{j} - cy \cdot \vec{j}$

$= (-my'' - by' - cy) \cdot \vec{j} = 0$

d'où l'équation $my'' + by' + cy = 0.$ (E)

(principe fondamental de Newton)

a). Viscosité nulle $(b = 0)$

donc, il faut résoudre l'équation suivante.

$$my'' + cy = 0 \quad (E_a)$$

d'où $S_{E_a} = \left\{ \cancel{k_1 + k_2 e} \; k_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + k_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(b) Viscosité faible (b petit t.q. $b^2-4mc<0$)

dans ce cas, l'équation caractéristique associée admet deux racines complexes, non réelles,

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{4mc-b^2}\,i}{2m}, \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{4mc-b^2}\,i}{2m}$$

donc $S_E = \left\{ \left(k_1 \cos \frac{\sqrt{4mc-b^2}}{2m} \cancel{t} \, t + k_2 \sin \frac{\sqrt{4mc-b^2}}{2m} t\right) e^{-\frac{b}{2m}t} \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(c). Viscosité grande (b grand t.q. $b^2-4mc>0$)

donc, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes.

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4mc}}{2m}, \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4mc}}{2m}$$

d'où $S_E = \left\{ k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

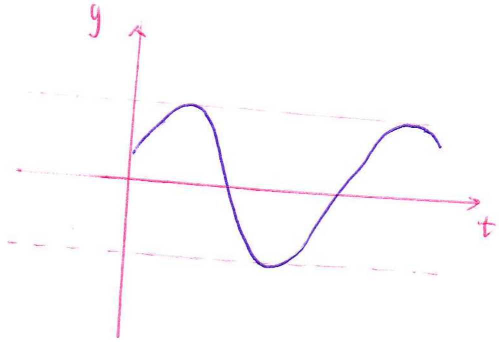
(d):

- Cas $b=0$: comme $y(t) = k_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, t + k_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}}\, t$

$$= k \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \varphi_0 \right)$$

où $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$,

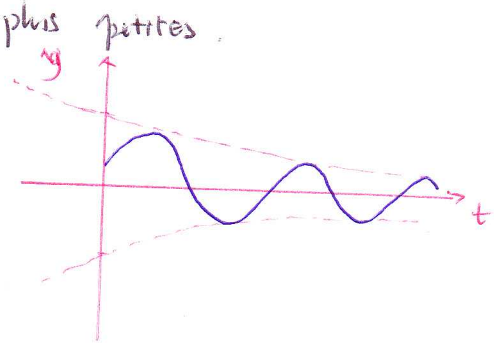
le mouvement de M est sinusoïdal, de pulsation $\sqrt{\frac{c}{m}}$, et d'amplitude k. Il oscille indéfiniment entre les cotes $-k$ et k et il n'y pas d'amortissement.



- Viscosité petite :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\left[k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t \right] e^{-\frac{b}{2m} t} \right) = 0$$

donc le mouvement de M est sinusoïdal amorti, les oscillations sont de plus en plus petites.

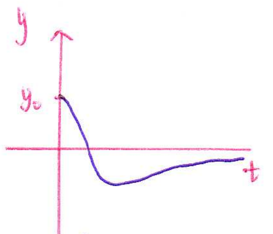


- Viscosité grande : puisque $m, c > 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4mc} < b$

d'où $r_1, r_2 < 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ le mouvement est rapidement amorti, sans oscillations avec éventuellement un passage par la position d'équilibre (cf le graphe de gauche !)



(cas où le point est lancé fortement vers la position d'équilibre) ii). $my'' + by' + cy = k \sin \lambda t$. (E)

a) $b = 0$

donc (E) devient

$$my'' + cy = k \sin \lambda t . \quad (E_a)$$

- l'ensemble des solutions de son équation homogène associée est $\left\{ K_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, t + K_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}}\, t \;/\; K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$
- recherche d'une solution de (E_a)

deux cas à distinguer :

1° cas : λi est une racine de l'équation caractéristique

$$m r^2 + c = 0 \quad (\text{c-a-d.} \; -\lambda^2 m + c = 0)$$

Il existe donc une solution sous la forme

$$y(t) = a x \sin \lambda t + b x \cos \lambda t . \quad \text{avec } a, b \text{ à déterminer.}$$

or $y'(t) = a \sin \lambda t + a x . \lambda \cos \lambda t + b \cos \lambda t$

$- b \lambda x \sin \lambda t$

$= (a - b \lambda x) \sin \lambda t + (a \lambda x + b) \cos \lambda t$

$y''(t) = - b \lambda \sin \lambda t + (a - b\lambda x) . \lambda \cos \lambda t$

$+ a \lambda \cos \lambda t - \lambda (a \lambda x + b) \sin \lambda t$

$= (-a \lambda^2 x - 2 \lambda b) \sin \lambda t + (2 a \lambda - b \lambda^2 x) \cos \lambda t$.

$\Rightarrow m y''(t) + c y(t)$

$= (- m \lambda^2 a \cancel{t} - 2 m \lambda b + c a \cancel{t}) \sin \lambda x + (2 a m \lambda - b m \lambda^2 \cancel{t} + \cancel{cbt}) \cdot \cos \lambda t$

$= - 2 m \lambda b \sin \lambda x + 2 a m \lambda \cos \lambda t$.

donc la fonction $y(t) = at\sin\lambda t + bt\cos\lambda t$ est une solution de (E_a)

$\Leftrightarrow \quad m y''(t) + c y(t) = k \sin\lambda t$.

$\Leftrightarrow \quad -2m\lambda b \sin\lambda t + 2am\lambda\cos\lambda t = k\sin\lambda t$

donc $\begin{cases} -2m\lambda b = k \\ 2am\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{k}{2m\lambda} \end{cases}$

d'où une solution particulière

$$y(t) = -\frac{k}{2m\lambda}\, t\cos\lambda t.$$

d'où $S_{E_a} = \left\{ -\dfrac{k}{2m\lambda} t\cos\lambda t + k_1\cos\sqrt{\tfrac{c}{m}}\,t + k_2\sin\sqrt{\tfrac{c}{m}}\,t \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

2° cas. λi n'est pas racine de l'équation $mr^2 + c = 0$

$(\Leftrightarrow \quad -\lambda^2 m + c \neq 0)$

Il existe une solution ss la forme

$$y(t) = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t.$$

d'où $A = 0$. $\quad B = \dfrac{k}{c - m\lambda^2}$

$\Rightarrow$ une solution particulière.

$$y(t) = \frac{k}{c - m\lambda^2}\sin\lambda t$$

$\Rightarrow S_{E_a} = \left\{ \dfrac{k}{c - m\lambda^2}\sin\lambda t + k_1\cos\sqrt{\tfrac{c}{m}}\,t + k_2\sin\sqrt{\tfrac{c}{m}}\,t \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(b)+(c) Supposons ici $b \neq 0$ (donc b est un réel >0)

il faut trouver une solution particulière de (E)

or le second membre est $f(t) = k \sin \lambda t$, et puisque $b \neq 0$

le nombre complexe $\lambda \cdot i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique

$$m r^2 + b r + c = 0$$

d'après le tableau, il existe une solution sous la forme

$$y(t) = A \cos\lambda t + B \sin \lambda t$$

or $y'(t) = -A\lambda \sin \lambda t + \lambda B \cos \lambda t$

$y''(t) = -A\lambda^2 \cos\lambda t - B\lambda^2 \sin\lambda t$

d'où $m y''(t) + b y'(t) + c y(t)$

$$= (-A\lambda^2 m + \lambda b B + cA)\cos\lambda t + (-B\lambda^2 m - Ab\lambda + cB)\sin\lambda t$$

$$= \left(A(c-\lambda^2 m) + \lambda b B\right)\cos\lambda t + \left(B(c-\lambda^2 m) - b\lambda A\right)\sin\lambda t.$$

donc la fonction $y = y(t) = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t$ est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(c-\lambda^2 m) + B\cdot(\lambda b) = 0 \\ -\lambda b A + (c-\lambda^2 m)\cdot B = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{k\lambda b}{(\lambda b)^2 + (c-\lambda^2 m)^2} \\ B = \dfrac{k(c-\lambda^2 m)}{(\lambda b)^2 + (c-\lambda^2 m)^2} \end{cases}$$

d'où

- si $b^2 - 4mc < 0$: $S_E = \left\{ -\dfrac{k\lambda b}{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2 m)^2}\cos\lambda t + \dfrac{k(c-\lambda^2 m)}{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2 m)^2}\sin\lambda t + \left(K_1 \cos \dfrac{\sqrt{4mc-b^2}}{2m}t + K_2 \sin \dfrac{\sqrt{4mc-b^2}}{2m}t\right)e^{-\frac{b}{2m}t} \,/\, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$

et si $b^2-4mc>0$

$$S_E=\left\{ -\frac{\ell\lambda b}{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2m)^2}\cos\lambda t+\frac{(c-\lambda^2m)\ell}{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2m)^2}\sin\lambda t + k_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4mc}}{2m}t}+k_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4mc}}{2m}t} \;\middle/\; k_1,k_2\in\mathbb{R}\right\}$$

<u>iii)</u> $(d>0)$ lorsque $t\to+\infty$

les solutions générales de (E) est peu différentes de la solution particulière

$$y(t)=-\frac{\ell\lambda b}{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2 m)^2}\cos\lambda t+\frac{(c-\lambda^2m)\ell}{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2m)^2}\cos\lambda t$$

$$=K\cos(\lambda t+\varphi')$$

où $$K=\sqrt{\frac{\ell^2(\lambda b)^2}{[(\lambda b)^2+(c-\lambda^2m)^2]^2}+\frac{(c-\lambda^2m)^2\ell^2}{[(\lambda b)^2+(c-\lambda^2m)^2]^2}}$$

$$=\cancel{\frac{\ell}{\sqrt{(\lambda b)^2+(c-\lambda^2m)^2}}}$$

<u>donc</u> quand $t\to+\infty$, à peu ~~pè~~près, le mouvement de M

est sinusoïdale de même pulsation λ que la force d'excitation,

et ayant comme amplitude K