4. Probabilités élémentaires

Exercice 4.1 Soit $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un ensemble constitué de 4 éléments distincts. On veut choisir 2 éléments dans Ω. Ce choix peut se faire en répétant ou non un élément, en ordonant ou non les él'ements choisis. Décrire explicitement l'ensemble des choix possibles dans les cas suivants : (a) cas avec répétition et avec ordre ; (b) cas avec ordre mais sans répétition ; (c) cas avec répétition mais sans ordre ; (d) cas sans ordre et sans répétition. *(Ici, pour e, $f \in \Omega$, on utilise la notation (e, f) pour signifier un couple ordoné, et la notation $[e, f]$ pour signifier un couple non-ordoné. En particulier, avec ces notations, si e et f sont deux éléments distincts de Ω, on a $(e, f) \neq (f, e)$, et $[e, f] = [f, e]$).*

Exercice 4.2 Déterminer l'univers correspondant à l'expérience aléatoire suivante :

i) On tire 3 cartes simultanément d'un paquet de 32 cartes et on considère la main obtenue.
ii) On tire une carte d'un paquet de 32 cartes, on la regarde, puis on la remet dans ce paquet, ceci 3 fois de suite et on considère les 3 cartes que l'on aura regardées.
iii) On lance une pièce de monnaie et on s'arrête au premier pile obtenu.

Exercice 4.3 Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω. Traduire en termes ensemblistes en fonction de A, B et C les événements suivants :

i) E_1 ="aucun des trois événement n'est réalisé" ;
ii) E_2 ="seuls A et B sont réalisés" ;
iii) E_3 ="deux événements au plus sont réalisés" ;
iv) E_4 ="un événement au moins est réalisé".

Exercice 4.4 Une entreprise propose ses employés dans le cadre de la formation continue l'apprentissage de 3 langues différentes : anglais, allemand, espagnol. Un sondage sur 100 personnes a permis de révéler les donnes suivantes (il est sous-entendu dans la suite que l'on peut suivre plusieurs cours en même temps) :

- 49 suivent le cours d'anglais,
- 49 suivent le cours d'allemand,
- 44 suivent le cours d'espagnol,
- 24 suivent allemand et espagnol,
- 29 suivent anglais et allemand,
- 22 suivent anglais et espagnol,
- 17 suivent les 3 cours.

On demande de calculer la probabilité qu'un employé
a) ne suive aucun cours,
b) ne suive qu'un seul cours.

Exercice 4.5 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, et soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{A}$.

i) Montrer $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$, et puis en déduire la formule suivante :
ii) $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$

Exercice 4.6 En 1999, 23% des ménages étaient équipés d'un ordinateur et 28% d'un téléphone portable. Ils étaient 70% n'avoir ni ordinateur ni téléphone portable.

i) Quelle est la probabilité pour un ménage pris au hasard d'être équipé d'un ordinateur et d'un téléphone portable.
ii) Ces chiffres sont contestés et on prétend qu'ils étaient en fait 73% n'avoir ni ordinateur ni téléphone portable. Est-ce que c'est possible ?

Exercice 4.7 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$. Montrer que

$$\frac{1}{2} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}.$$

Exercice 4.8 On lance deux dés (un bleu et un rouge) équilibrés, à 6 faces numérotés de 1 à 6.

i) Quelle est la probabilité que le dé bleu amène un nombre pair ? même question pour le dé rouge.

ii) Quelle la probabilité que la somme des nombres obtenus soit paire ? soit impaire ?

Exercice 4.9 Soient A et B deux événements indépendants. On suppose que la probabilité de A est $\frac{1}{2}$ et que celle de B est $\frac{1}{4}$.

i) Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux événements A ou B se réalise ?

ii) Quelle est la probabilité qu'un seul de ces deux événements se réalise ?

Exercice 4.10 0n jette deux dés, équilibrés et numérotés de 1 à 6.

i) Quelle est la probabilité d'obtenir 5 comme somme des chiffres ?

ii) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois la somme 6 si l'on jette deux fois les deux dés ?

iii) Les événements “la somme des chiffres est impaire” et “l'un des chiffres au moins vaut 1” sont-ils indépendants ?

iv) Quelle est la probabilité que la somme soit égale à 4 ?

v) Quelle est la probabilité qu'au moins une fois lors de 10 jets consécutifs et indépendants des deux dés, la somme des chiffres soit égale à 4.

Exercice 4.11 Un facteur distrait distribue au hasard n lettres dans n boites aux lettres. On suppose que chaque lettre n'a qu'un seul destinataire.

i) Quelle est la probabilité que chaque destinataire reçoive la lettre qui lui était destinée ?

ii) Quelle est la probabilité que Jacques reçoive la lettre qui lui était destinée ?

Exercice 4.12 Quelle est la probabilité pour que dans un groupe de TD de 30 étudiants au moins deux d'entre eux aient le même jour anniversaire (on suppose qu'aucun n'est né un 29 février et que les naissances se répartissent de façon uniforme sur l'année).

Exercice 4.13

i) Un code d'accès informatique est composée de 9 chiffres distinct, qu'elle est la probabilité de réussite si l'on fait un code au hasard connaissant ces 9 chiffres ?

ii) Maintenant les 9 chiffres ne sont plus nécessairement distincts. Un pirate informatique connait les chiffres utilisés (1 à 6) et ceux qui sont répétés (1 et 2), quelle est alors sa probabilité de réussite en faisant un code au hasard (on pourra commencer par chercher combien de fois 1 et 2 peuvent être répétés) ?

Exercice 4.14 Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On tire au hasard deux fois une boule de l'urne en remettant la boule après tirage.

i) Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et une boule noire

ii) dans cet ordre là ?

iii) dans un ordre quelconque ?

Mêmes questions si les tirages se font sans remise.