

6. Variables aléatoires discrètes

Exercice 6.1 L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire deux sujets au hasard puis choisit celui qu'il désire traiter. Il a révisé 12 sujets et on considère la variable aléatoire X qui est le nombre de sujets révisés parmi les deux sujets tirés.

- i) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- ii) Quelle est la probabilité pour que le candidat obtienne au moins un sujet révisé ?

Exercice 6.2 On jette deux dés (l'un rouge, l'autre bleu), on note X_1 la variable aléatoire nombre de points obtenus sur le premier dé (= dé rouge) et X_2 la variable aléatoire nombre de points obtenus sur le deuxième dé (= dé bleu). Considérer la v.a. $X = \max(X_1, X_2)$. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Déterminer la loi de $X = \max(X_1, X_2)$. et puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 6.3 On considère deux aléatoires indépendantes X, Y , qui prennent les valeurs et probabilités suivantes :

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Z = |X - Y|$. Déterminer la loi de Z ; calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 6.4 Le prix d'un ticket de tramway est de 1 euro et celui d'une amende est de 40 euros. La probabilité qu'un voyageur soit contrôlé lors d'un trajet est p . On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de contrôles d'un voyageur lors de N trajets.

- i) Déterminer la loi de X .
- ii) Un voyageur indélicat est tenté de ne jamais composer son ticket. Quelle doit être la probabilité p de contrôle pour l'en dissuader ? (on pourra introduire la variable aléatoire Y gain lorsque l'on ne compose jamais lors des N trajets)

Exercice 6.5 On jette dix pièces de monnaie truquées de telle sorte que pour chacune d'elles, la probabilité d'obtenir pile soit 0,3. Soit X le nombre de pile obtenus au cours de ce lancer.

- i) Déterminer la loi de X , l'espérance et la variance de X .
- ii) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ? moins de 3 piles ?
- iii) Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu plus de 3 piles sachant que l'on en a obtenu au plus 5 ?

Exercice 6.6 Sur un effectif de 2000 personnes, le nombre N d'individu faisant une mauvaise réaction à une injection d'un sérum suit la loi de Poisson de moyenne 2. Calculer la probabilité pour que : (i) 3 individus aient une mauvaise réaction ; (ii) plus de deux aient une telle réaction.

Exercice 6.7 On a constaté que le nombre moyen de clients, par minute, qui arrivent aux caisses d'un supermarché est 0,8. Sachant que le nombre de clients par minute suit une loi de Poisson et que $e^{-0,8} \simeq 0,449$, déterminer la probabilité pour

- i) Qu'il n'y ait aucun client entre 14h30 et 14h31.
- ii) Qu'il y ait un client ou deux entre 14h30 et 14h31.
- iii) Qu'il y ait au plus 3 clients entre 14h30 et 14h31.