LICENCE 1, SEMESTRE 1
BASE DE L'ANALYSE

Test 3 (trois exos)

1 -
(1.a) Calculer les intégrales suivantes :
- $\int \frac{x}{x^2+4}dx$ $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+4} \cdot (x^2+4)' dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C$
- $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

$$\| $$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{1}{2}x)^2+1} dx = \frac{2}{4} \int \frac{1}{(\frac{1}{2}x)^2+1} \cdot (\frac{1}{2}x)' dx$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(\frac{1}{2}x) + C$$

(1.b) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$, puis calculer $\int \frac{1}{x(x+1)}dx$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x-1)}$$

donc, on veut $\begin{cases} a+b=0 \\ +a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=+1 \\ b=-1. \end{cases}$

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) dx = -\ln|x+1| + \ln|x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

1.c) Calculer $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ en effectuant un changement de variables $u = e^x$.

$u = e^x \iff x = \ln u$

$$\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du$$

$$= \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C$$

$$= -\ln|e^x+1| + \ln(e^x) + C$$

$$= -\ln(e^x+1) + x + C$$

2 - On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$(E) \qquad y' + \frac{x-2}{x-1} y = x(x-1), \quad x < 1.$$

2.a) Vérifier que la fonction $\ln(1-x) - x$ est une primitive de la fonction $\frac{2-x}{x-1}$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, puis résoudre l'équation homogène associée de (E).

$(E) \Leftrightarrow \quad y' = \frac{2-x}{x-1} y + x(x-1)$

$(\ln(1-x)-x)' = \frac{1}{x-1} - 1 = \frac{2-x}{x-1}$, d'où solutions homogènes $Ce^{\ln(1-x)-x} = C(1-x)e^{-x}$ $C \in \mathbb{R}$

2.b) Trouver une solution particulière de (E) avec la méthode de la variation de la constante.

on cherche sol. de la forme $y_p(x) = C(x) \cdot (1-x) e^{-x}$

$\Rightarrow \quad C'(x) \cdot (1-x) e^{-x}) = x(x-1)$

$\Rightarrow \quad C'(x) = -x e^{x}$

$\Rightarrow$ on peut prendre $C(x) = (-x+1) e^{x}$, d'où $y_p(x) = (-x+1)(1-x) e^{-x} e^{x}$
$= (x-1)^2$.

2.c) Déterminer la solution $y(x)$ de (E) telle que $y(0) = 0$.

$S_E = \{ \underset{x<1}{x \mapsto} C \cdot (1-x) e^{-x} + (1-x)^2 \ / \ C \in \mathbb{R} \}$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow \quad C \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad C = -1$

donc la solution est $(x-1)e^{-x} + (x-1)^2$

3 - On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$(E) \qquad y'' - 3y' = -6t - 1.$$

2.a) Résoudre l'équation homogène associée de (E).

$y'' - 3y' = 0 \quad (E_0)$

$X^2 - 3X = 0 \quad (C)$ deux solutions $0, 3$

$\Rightarrow$ $S_{E_0} = \{ t \mapsto C_1 + C_2 e^{3t} \ / \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

2.b) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y(t) = at^2 + bt$.

$y'' = 2a$

$y' = 2at + b$

d'où $y''(t) - 3y'(t) = -6at - 3b + 2a = -6t - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} -6a = -6 \\ -3b + 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = t^2 + t$

2.c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

$S_E = \{ t \mapsto C_1 + C_2 e^{3t} + t^2 + t \ / \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$