Quelques indications de la feuille de TD n^{o}6

Exo. 10. Soit $C(\sigma) \subset S_{10}$ l'ensemble des permutations qui commutent avec σ. Notons $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\beta = (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ et $\gamma = (1\ 6)(2\ 7)(3\ 8)(4\ 9)(5\ 10) \in S_{10}$. Avec un calcul explicite, on montre que ces trois éléments commutent avec σ. Ainsi $\alpha, \beta, \gamma \in C(\sigma)$. Par suite, on obtient l'inclusion

$$H :=< \alpha, \beta, \gamma >\subset C(\sigma).$$

Dans la suite, on va montrer que $C(\sigma) = H$. Pour cela, soit $\tau \in S_{10}$. Alors on a

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\ \cdots\ \tau(5))(\tau(6)\ \cdots\ \tau(10))$$

Par suite, σ commute avec τ si et seulement si

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\ \cdots\ \tau(5))(\tau(6)\ \cdots\ \tau(10)) = (1\ \cdots\ 5)(6\ \cdots\ 10) = \sigma$$

Il y a alors deux possiblités : (i) $(\tau(1)\ \cdots\ \tau(5)) = (1\ \cdots\ 5)$, et $(\tau(6)\ \cdots\ \tau(10)) = (6\ \cdots\ 10)$; (ii) $(\tau(1)\ \cdots\ \tau(5)) = (6\ \cdots\ 10)$ et $(\tau(6)\ \cdots\ \tau(10)) = (1\ \cdots\ 5)$.

Cas (i) : Il existe alors $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $\tau = (1\ \cdots\ 5)^i(6\ \cdots\ 10)^j = \alpha^i\beta^j$. En particulier, $\tau \in< \alpha, \beta >\subset H$.

Cas (ii) : Rappelons que comme $H \subset S_{10}$ est un sous-groupe, et $\tau, \gamma \in H$, on a $\tau\gamma \in H$. C'est-à-dire, $\tau\gamma$ commute avec σ. D'autre part, on a alors

$$(\tau\gamma(1)\ \tau\gamma(2)\ \cdots\ \tau\gamma(5)) = (\tau(6)\ \tau(7)\ \cdots\ \tau(10)) = (1\ 2\ \cdots\ 5)$$

et

$$(\tau\gamma(6)\ \tau\gamma(7)\ \cdots\ \tau\gamma(10)) = (\tau(1)\ \tau(2)\ \cdots\ \tau(5)) = (6\ 7\ \cdots\ 10)$$

Par suite, d'après le cas (i), on a $\tau\gamma \in< \alpha, \beta >\subset H$. Ainsi $\tau \in H$. Ceci finit la preuve.

Donc, finalement, on a $C(\sigma) = H$.

Exo. 13.

1. Par un calcul explicite, on a
$$G = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \subset S_4.$$
2. Comme pour chaque $\sigma \in G - \{id\}$ (σ est alors l'un des σ_i), il n'a pas de point fixe. Il en est de même de $\tau\sigma\tau^{-1}$. D'où le résultat.
3. Pour chaque $\sigma \in G - \{id\}$, vu la description explicte de G dans la question (1), σ est l'un des σ_i. Par suite, σ est d'ordre 2. On en déduit que $\tau\sigma\tau^{-1}$, un conjugué de σ, est également d'ordre 2.
4. Soit α un él'ement d'ordre 2 sans point fixe de S_4. Alors $\alpha(1) \neq 1$. Donc $\alpha(1) \in \{2, 3, 4\}$. Comme α est d'ordre 2, alors $\alpha(\alpha(1)) = 1$.
   – Si $\alpha(1) = 2$, alors $\alpha(2) = \alpha(\alpha(1)) = 1$. Comme α est sans point fixe, alors $\alpha(3) \neq 3$. On a alors forcément $\alpha(3) = 4$. On obtient donc $\alpha = (1\ 2)(3\ 4) = \sigma_1$.
   – Si $\alpha(1) = 3$, le même raisonnement nous donne $\alpha = (1\ 3)(2\ 4) = \sigma_2$.
   – Si $\alpha(1) = 4$, alors $\alpha = (1\ 4)(2\ 3) = \sigma_3$.
   Donc, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les seuls trois éléments d'ordre 2 sans point fixe de S_4. On en déduit immédiatement que $G \subset S_4$ est alors distingué compte tenu des questions (2) et (3).

Exo. 14. Soit σ un élément de A_n, distinct de la permutation identique. Il s'agit de prouver que n'appartient pas au centre de A_n. Puisque σ n'est pas la permutation identique, il existe deux élément distincts a et b de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ tels que $\sigma(a) = b$. Puisque $n \geq 4$, nous pouvons trouver deux autres éléments dans cet ensemble, soient c et d. Posons $\varphi = (b\ c\ d)$. Puisque φ est un cycle de longueur impaire, c'est une permutation paire, autrement dit un élément de A_n. Montrons que σ et φ ne commutent pas : $\sigma\varphi(a) = \sigma(a) = b$, mais $\varphi\sigma(a) = \varphi(b) = c$. Par le choix de b, c, on a $b \neq c$. Donc $\sigma\varphi \neq \varphi\sigma$. En particulier, σ n'appartient pas au centre de A_n. Comme $\sigma \in A_n$ est choisi arbitrairement, on obtient ainsi que le centre de A_n est trivial dès que $n \geq 4$.

Exo. 15. Soit $f\colon S_n \to \mathbb{C}^\star$ un morphisme de groupe. Remarquons d'abord que, comme $\mathbb{C}^\star$ est un groupe *commutatif*, pour tout $\sigma, \tau \in S_n$, on a

$$f(\tau\sigma\tau^{-1}) = f(\tau)f(\sigma)f(\tau^{-1}) = f(\tau)f(\tau^{-1})f(\sigma) = f(\sigma).$$

Ainsi, si σ et σ' sont deux éléments conjugués, on a alors $f(\sigma) = f(\sigma')$. D'autre part, soit $\sigma \in S_n$ une *transposition*. Alors $f(\sigma) \in \mathbb{C}^\star$ est d'ordre divisant 2. Par suite, $f(\sigma) = 1$ ou -1.

- Si $f(\sigma) = 1$. Comme les transpositions de S_n sont deux à deux conjugués, il en résulte que $f(\sigma') = 1$ pour une transposition *quelconque*. De plus, on sait que S_4 est engendré par les transpositions, par suite, on a forcément $f(\tau) = 1$ pour *tout* $\tau \in S_n$. C'est-à-dire, f est le morphisme trivial.
- $f(\sigma) = -1$, on a alors $f(\sigma') = -1 = \mathrm{sign}(\sigma')$ pour *toute* transposition $\sigma' \in S_n$. De nouveau, comme les transpositions de S_n engendrent S_n, on obtient donc $f(\tau) = \mathrm{sign}(\tau)$ pour tout τ. Ainsi, $f = \mathrm{sign}$.

Ceci achève la preuve.

Exo. 16.

1. Vérification directe.
2. On voit la famille $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ comme la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $\sigma \in S_n$, on a

$$\sigma \cdot X_i = X_{\sigma(i)}$$

Ainsi, on trouve que la matrice $(\sigma \cdot X_1, \cdots, \sigma \cdot X_n)$ est la matrice de application $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dans la base canonique $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ de $\mathbb{R}^n$. Par suite,

$$\begin{aligned}(\sigma\tau)\cdot(X_1,\cdots,X_n) &= \sigma(\tau\cdot(X_1,\cdots,X_n)) = \sigma((X_1,\cdots,X_n)(\tau\cdot X_1,\cdots,\tau\cdot X_n)) \\ &= \sigma(X_1,\cdots,X_n)\cdot(\tau\cdot X_1,\cdots,\tau\cdot X_n) = (X_1,\cdots,X_n)(\sigma\cdot X_1,\cdots,\sigma\cdot X_n)(\tau\cdot X_1,\cdots,\tau\cdot X_n).\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$(\sigma\tau\cdot X_1,\cdots,\sigma\tau\cdot X_n) = (\sigma\cdot X_1,\cdots,\sigma\cdot X_n)\cdot(\tau\cdot X_1,\cdots,\tau\cdot X_n).$$

C'est-à-dire, on a $P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau)$, autrement-dit, l'application P est un morphisme de groupes.
3. Soit $\sigma = (i\ j)$ une transposition. On a alors

$$\sigma\cdot X_k = \begin{cases} X_k: & k \notin \{i,j\} \\ X_i; & k = j \\ X_j; & k = i \end{cases}$$

Ainsi $\det(P(\sigma)) = -1 = \varepsilon(\sigma)$. D'ailleur, comme les transpositions engendrent le groupe S_n, on en déduit que $\det(P(\tau)) = \varepsilon(\tau)$. D'où le résultat.

Exo. 17. Remarquons d'abord que l'existence d'un élément d'ordre 2 est assurée par exo. 4 de cette feuille. On fait agir G sur $X = G$ de la manière suivante :

$$G \times X \to X, \quad (h, x) \mapsto hx.$$

On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$\phi\colon G \to S(X), \quad h \mapsto \phi_h$$

avec $\phi_h\colon X \to X$ donné par $x \mapsto hx$.

1. Pour chaque $x \in G$, comme $g \in G$ est d'ordre 2, on a $\sigma(x) \neq x$ et $\sigma(\sigma(x)) = g^2x = x$. Par suite, $\sigma = \phi_g$ est le composé de m transpositions. Comme m est impair, il en résulte que $\sigma = \phi_h \in S(X)$ est une permutation impair.
2. On considère l'application de signe :

$$\varepsilon\colon G \to \{\pm 1\}, \quad h \mapsto \mathrm{sign}(\phi_h).$$

Compte tenu de la question (1), on a $\varepsilon(g) = -1$, en particulier, ce morphisme ε est non trivial. Par suite, son noyau $\ker(\varepsilon) \subset G$ nous fournit un sous-groupe d'indice 2 de G.

Exo. 18. Remarquons d'abord que comme $|S_n| = n!$, le sous-groupe $H \subset G$ est d'indice $\frac{n!}{n!/2} = 2$. En particulier, $H \subset G$ est *distingué*.

1. Il y a deux cas à distinguer :
   – Si $\sigma \in H$. Alors $\sigma H = H\sigma = H$, et $\sigma K = K\sigma = K$;
   – Si $\sigma \in K$. Alors $\sigma H = H\sigma = K$, et $\sigma K = K\sigma = H$.
2. Soient $\sigma, \tau \in S_n$ deux permutation conjugués, et soit $\alpha \in S_n$ tel que $\tau = \alpha\sigma\alpha^{-1}$. Supposons $\sigma \in K$, et montrons qu'on a alors $\tau \in K$, ou d'une manière équivalente, $\tau H = K$. Il y a deux cas à distingué :
   – Si $\alpha \in H$, alors $\alpha^{-1} \in H$. Par suite, en vertu de la question (1), on a
   $$\tau H = \alpha\sigma\alpha^{-1}H = \alpha\sigma H = \alpha K = K.$$
   C'est-à-dire, on a $\tau \in K$.
   – Si $\alpha \in K$, alors $\alpha^{-1} \in K$. Par suite, on a
   $$\tau H = \alpha\sigma\alpha^{-1}H = \alpha\sigma K = \alpha H = K.$$
   On a encore $\tau \in K$.
   D'où l'assertion.
3. Soit $\sigma \in S_n$ une transposition. Alors $\sigma \notin H$: si non, $\sigma \in H$, par suite, d'après (2), H contienne alors tous les conjugés de σ. C'est-à-dire, H contienne tous les transpositions (car les transpositions sont deux à deux conjuguées). On aurait alors $H = S_n$ (car les transpositions forment une famille génératice de S_n), d'où une contradiction (car $H \subset S_n$ d'indice $2\,!$). Donc $\sigma \notin H$. D'autre part, soit τ une autre transposition, donc $\tau \notin H$. Par suite (par (2))
   $$\sigma\tau H = \sigma K = H.$$
   Ainsi, $\sigma\tau \in H$. De la même manière, soit $\beta \in S_n$ une permutation paire, on peut alors la décomposer en produit de transpositions $\beta = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$ avec k un entier *pair*. En appliquant encore la question (2), on voit immédiatement que $\beta \in H$. Donc $A_n \subset H$ car A_n est exactement l'ensembles des permutations paire. Or A_n est de cardinal $n!/2$, on a donc $H = A_n$, d'où le résultat.