UPS – Centre d'Orsay
Mathématiques

Arithmétique – Maîtrise
Année 2003–2004

FEUILLE D'EXERCICES n° 6

Dans toute la feuille, p désigne un nombre premier, s un complexe de la forme $s = \sigma + i\tau$. Pour f, g à valeurs dans $\mathbb{C}$, on notera $f \ll g$ si $|f| \leqslant K|g|$ pour une constante absolue K.

Exercice 1 – Soit $p(n)$ le n-ième nombre premier, montrer que le TNP est équivalent à $p(n) \sim n \log n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 – En utilisant le TNP et la formule de sommation d'Abel, donner un équivalent de $\sum_{p \leqslant x} 1/p$. Même question pour $\sum_{p \leqslant x} \log(p)$; en déduire que $\prod_{p \leqslant x} p = e^{x+o(x)}$.

Exercice 3 – [*pour sommer un produit de convolution, intervertir les sommes*]

a) Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ des sommes partielles $n \leqslant x$ des séries de terme général

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1, \quad \tau(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \ (k \geqslant 1), \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) n/d$$

Pour celles d'entre elles qui sont multiplicatives, donner les séries de Dirichlet associées.

b)i) Montrer que la série de Dirichlet associée à $\mu^2(n)$, la fonction caractéristique des entiers sans facteurs carrés, est $\zeta(s)/\zeta(2s)$

ii) Montrer que $1/\zeta(2s)$ est associée à $c(n)\mu(\sqrt{n})$ où $c(n) = 1$ si n est un carré, et 0 sinon.

iii) En déduire que $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ puis que le nombre d'entier sans facteurs carrés dans $[1, x]$ est équivalent à $x/\zeta(2)$.

c) Identifier la série de Dirichlet associée à $2^{\omega(n)}$ [*c'est un quotient de fonctions* ζ] et en déduire que

$$\sum_{n \leqslant x} 2^{\omega(n)} \sim \frac{1}{\zeta(2)} x \log x$$

Exercice 4 – Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que pour $\sigma > 0$, $N \in \mathbb{N}_{>0}$, $s \neq 1$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant N} n^{-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^{+\infty} \{t\} t^{-s-1} dt,$$

où $\{t\} := t - \lfloor t \rfloor$ (partie fractionnaire de t), puis que

$$\zeta(s) \ll \frac{|\tau|^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \text{ quand } |\tau| \geqslant 2 \text{ et } \sigma \geqslant \alpha.$$

★ **Exercice 5** –

a) En calquant la démonstration du TNP, montrer

Théorème 1. *Soit $F(s) = \sum a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet à termes positifs ($a_n \geqslant 0$), d'abscisse de convergence 1, avec un pôle simple en $s = 1$, de résidu λ. On suppose de plus qu'il existe $\delta > 0$ tel que $G(s) := F(s) - \lambda(s-1)^{-1} \ll 1 + |\tau|^{1-\delta}$ si $\sigma \geqslant 1$. Alors*

$$A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n \sim \lambda x$$

b) Montrer que l'hypothèse sur la croissance de G est vérifiée si $\sigma_c(F/\zeta) < 1$. Plus précisément :

Théorème 2. *Soit $F(s) = \sum a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c. Soit $\varepsilon > 0$; on a uniformément pour $\sigma_c < \sigma_0 \leqslant \sigma$*

$$F(s) \ll_\varepsilon \tau^{\max(0, 1+\sigma_c - \sigma)+\varepsilon} \qquad (|\tau| > 1)$$

Preuve. On peut supposer $\sigma_0 > \sigma_c + \varepsilon =: \kappa$ et écrire $A(t) := \sum_{n \leqslant t} a_n n^{-\kappa}$, soit $A(t) = F(\kappa) + o(1)$. Conclure en majorant

$$F(s) = \sum_{n \leqslant N} a_n n^{-s} + \int_{N^-}^{+\infty} t^{\kappa - s} dA(t)$$

$\square$

c) Dans le cas où $F(s)$ admet un pole en $s = \alpha > 0$ et où l'on peut montrer que $\sum_{n \leqslant x} a_n n^{1-\alpha} \sim \lambda x$ par les méthodes ci-dessus appliquées à $F(s + \alpha - 1)$, montrer que

$$\sum_{n \leqslant x} a_n \sim \operatorname{Res}(F, s = \alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

[*utiliser une sommation d'Abel*]

★ **Exercice 6** –

a) En reprenant la démonstration de la formule de Perron, montrer que pour $\kappa, x, T > 0$, on a

$$h(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} x^s \frac{ds}{s} \ll x^\kappa (1 + T|\log x|)^{-1}$$

où $h(x) = 1, \frac{1}{2}, 0$ suivant que $x > 1$, $x = 1$ ou $x < 1$ [*la majoration standard du reste est $x^\kappa / T|\log x|$ si $x \neq 1$, et $\kappa/(T+\kappa)$ si $x = 1$; pour $T|\log x| < 1$, écrire $x^s = x^\kappa(1 + (x^{it} - 1))$*] En déduire que si $F(s) = \sum a_n n^{-s}$ est une série d'abscisse de convergence absolue finie $\sigma_a \geqslant 0$, on a pour $\kappa > \sigma_a$, $T, x \geqslant 1$, $A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n$

$$A(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(x) x^s \frac{ds}{s} \ll x^\kappa \sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^\kappa (1 + T|\log(x/n)|)}$$

★ **b)** On suppose que $F(s) = \zeta^k(s) G(s)$ où $k \geqslant 1$, $G(1) \neq 0$ $\sigma_c(G) < 1$. On se donne une fonction $B(n)$ telle que $|a_i| \leqslant B(n)$ pour tout $i \leqslant n$ et on suppose que $a_n \in \mathbb{R}^+$ si $n \gg 1$. Soit $\varepsilon > 0$.

i) Montrer que $\sigma_a(F) = 1$ et que $F(\sigma) = \sum a_n n^{-\sigma} \ll (1 - \sigma)^{-k}$ pour tout $\sigma > 1$.

ii) On pose $\kappa = 1 + (\log x)^{-1}$. Montrer que

$$A(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(x) x^s \frac{ds}{s} \ll \frac{x}{T} (\log x)^k + B(2x)\big(1 + \frac{x}{T} \log T\big)$$

[*pour* $x/2 \leqslant n \leqslant 2x$, *écrire* $n = [x] + h$ *et* $|\log(x/n)| \gg |h|/x$]

iii) On suppose que $B(x) \ll x^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et qu'il existe $\gamma \geqslant 0$ et $\kappa' < 1$ tels que $|F(s)| \ll |\tau|^{\gamma(1-\sigma)}$ quand $\sigma \in [\kappa', \kappa]$, $\tau \to \infty$ (celà suit de majorations de ζ et de l'hypothèse $\sigma_c(G) < 1$ grâce à l'exercice précédent). Montrer qu'en déplaçant l'axe d'intégration à gauche du pôle, pour un choix convenable de T, on obtient

$$A(x) = xP_{k-1}(\log x) + O(x^{1-\varepsilon})$$

pour un polynôme P_{k-1} de degré $k-1$ dont on indiquera le terme dominant, et un $\varepsilon > 0$.

★★ **c)** Calculer un équivalent des sommes partielles $n \leqslant x$ de $\tau_k := \mathbf{1}^{*k}$, *i.e.* $\tau_k(n) = \sum_{d_1 \dots d_k = n} 1$.

Exercice 7 – On note $f(n) = \tau^2(n) 4^{-\omega(n)}$, où τ désigne la fonction nombre de diviseurs, et on pose $F(s) = \sum_{n \geqslant 1} f(n) n^{-s}$.

a) Calculer $f(p^k)$ et montrer qu'il existe un réel $\alpha < 1$ et G une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ tels qu'on ait $F(s) = \zeta(s) G(s)$.

b) En utilisant l'Exercice 5, donner un équivalent de la somme partielle $n \leqslant x$ des $f(n)$.

★ **c)** Même question pour $\varphi(n)^2$, $2^{\omega(n)}$ [*le pôle est double, multiplier par* $\zeta^{-1}(s)$ *et sommer un produit de convolution, ou utiliser l'exercice précédent*].

Exercice 8 – Soit $a_n := \mathrm{card}\{m \in \mathbb{N} : \varphi(m) = n\}$.

a) Montrer que a_n est fini.

b) Montrer que a_n est nul si $n > 1$ est impair. La réciproque est-elle vraie ?

c) Montrer que les séries $F(s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(m)^s}$ et $G(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ sont absolument convergentes pour $\sigma > 1$ et que $F(s) = G(s) = f(s)\zeta(s)$ avec

$$f(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\Big).$$

d) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} a_n$.

Exercice 9 – Pour $n \geqslant 1$, $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$, on pose $\alpha(n) = a_1 \dots a_k$.

a) Montrer que $F(s) = \sum \alpha(n) n^{-s}$ converge absolument pour $\sigma > 1$ et qu'on a dans ce domaine l'égalité $F(s) = \zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)/\zeta(6s)$.

b) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \alpha(n)$.

Exercice 10 – Dans cet exercice, on donne une autre démonstration de la non-annulation de $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = 1$. On admet que ζ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} - \{1\}$, et que les zéros de $\zeta(s)$ dans le domaine $\sigma \leqslant 0$ sont situés aux points $s = -2k$, $k \geqslant 1$ [*c'est une conséquence immédiate de l'équation fonctionnelle*].

a) Soit $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$. Montrer que $G(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ si $\sigma > 0$. En déduire que $\zeta(\sigma) \neq 0$ pour tout $\sigma \in]0, 1[$.

b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma_{i\theta}(n) := \sum_{d|n} d^{i\theta}$ et

$$F_\theta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_{i\theta}(n)|^2}{n^s}.$$

Montrer que $F_\theta(s)$ converge pour $\sigma > 1$ et que, dans ce domaine, on a l'égalité

$$F_\theta(s) = \zeta^2(s)\zeta^{-1}(2s)\zeta(s-i\theta)\zeta(s+i\theta).$$

[*le membre de droite est associé à la fonction multiplicative* $\sum_{vwx^2yz=n} \mu(x)y^{i\theta}z^{-i\theta}$ *en s'inspirant du millieu de l'Exercice 3 ; poser* $Y := xy$, $Z := xz$ *et effectuer la sommation sur* x *en utilisant* $\mathbf{1} * \mu = \delta_1$]

c) On suppose que $\zeta(1+i\theta) = 0$, montrer qu'alors l'abscisse de convergence de $F_\theta(s)$ serait $\leqslant -1$ [*utiliser le Lemme de Landau*]. Conclure.

Exercice 11 – Dans cet exercice, χ est un caractère réel non principal modulo $q \geqslant 3$. On veut montrer que $L(1,\chi) \neq 0$.

a) On note $\mathbf{1}$ la fonction arithmétique constante égale à 1. Montrer les inégalités

$$(\chi * \mathbf{1})(n) \geqslant 0, \qquad (\chi * \mathbf{1})(n^2) \geqslant 1,$$

valables pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Montrer la relation

$$\sum_{n \leqslant x} (\chi * \mathbf{1})(n) = xL(1,\chi) + O(x^{1/2}).$$

c) Montrer que la série

$$F(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(\chi * \mathbf{1})(n) - L(1,\chi)}{n^s}$$

est convergente pour $\sigma > 1/2$.

d) Montrer que l'hypothèse $L(1,\chi) = 0$ entraîne l'inégalité

$$F(\sigma) \geqslant \zeta(2\sigma) \qquad (\sigma > 1/2).$$

Conclure.