Devoir n° 1

À rendre pour la semaine du 9 Octobre.

Exercice 1. Soient les quatre assertions suivantes :

a. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad x+y>0.$

b. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x+y>0.$

c. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^*, \exists z \in \mathbb{R}\quad xyz=1.$

d. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad (((x+y)^2=0) \Rightarrow (x=-y)).$

- Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. (2 pts)
- Donner leur négation. (2 pts)

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit a un entier naturel. On note : $S_a(n) = \sum_{k=1}^{n} k^a$.

a. Montrer par récurrence sur n que $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. (2 pts)

b. Montrer par récurrence sur n que $S_1^2(n) = S_3(n)$. (2 pts)

c. En déduire une expression de $S_3(n)$ en fonction de n. (1 pt)

Exercice 3. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b}$ l'application

$$\begin{array}{rccl} f_{a,b} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b. \end{array}$$

a. Déterminer l'ensemble des valeurs de (a,b) pour lesquelles la fonction $f_{a,b}$ est injective et l'ensemble des valeurs de (a,b) pour lesquelles elle est surjective. (2 pts)

b. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors $a=c$ et $b=d$. (1 pt)

c. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & (a,b) & \mapsto & f_{a,b}. \end{array}$$

F est-elle injective ? Surjective ? (2 pts)

Exercice 4. Soit E un ensemble non vide et A un sous-ensemble de E. On considère la fonction :

$$\chi_A : E \to \{0,1\}$$

définie par : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

a. Soient A, B deux sous-ensembles de E. Montrer : $(\chi_A = \chi_B) \Leftrightarrow (A = B)$. (0,5 pt)

b. Montrer que : $\chi_{\complement A} = \chi_E - \chi_A$. Calculer $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$ et χ_{A-B} en fonction de χ_A et χ_B. (2 pts)

c. On s'intéresse alors à la différence symétrique de A et B, définie par : $A \triangle B = (A\cup B) - (A \cap B)$. Faire un dessin. Calculer $\chi_{A\triangle B}$ en fonction de χ_A et χ_B. (1,5 pt)

d. Soient A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$. (2 pts)