Devoir n° 2 (Correction)

Exercice 1. Puisque $z = 1$ n'est pas racine de l'équation, on peut réécrire celle-ci sous la forme

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27, \quad z \neq 1.$$

On a donc $Z^6 = -27$, où l'on a posé $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$, soit $Z = \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})}$, $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $Z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}$, $\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $\sqrt{3}e^{i\frac{-5\pi}{6}}$. Finalement, puisque $z = \dfrac{Z+1}{Z-1}$, on obtient

$$z = 2 - i\sqrt{3}, \quad 2 + i\sqrt{3}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2-i\sqrt{3}}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{2+i\sqrt{3}}{7}.$$

Exercice 2.

a. **(i)** Puisque a et b sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Si c est un entier quelconque, le couple $(x, y) = (uc, vc)$ est alors solution de l'équation $ax + by = c$.

(ii) Si $ax + by = c$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $a(x + kb) + b(y - ka) = ax + by = c$. Soit q le quotient de la division euclidienne de y par a. Alors $y - qa = r$ est le reste de cette division, de sorte que l'on a $0 \leqslant r \leqslant a - 1$. Ainsi, le couple $(x', y') = (x + qb, y - qa)$ est une solution de l'équation initiale vérifiant $0 \leqslant y' \leqslant a - 1$.

(iii) Soit (x, y) une solution de l'équation $ax + by = c$ vérifiant $0 \leqslant y \leqslant a - 1$ (un tel couple existe d'après la question précédente). On a alors $ax = c - by > ab - a - b - b(a - 1) = -a$, d'où $x > -1$. Or x est un entier (relatif), donc la dernière inégalité équivaut à $x \geqslant 0$. On a donc bien trouvé un couple (x, y) d'entiers positifs ou nuls solution de l'équation $ax + by = c$.

b. *Application :*

(i) Pour payer une somme S, un acheteur utilise un nombre x de billets de 7 € et y de billets de 11 €. Le vendeur lui rend la monnaie en utilisant x' billets de 7 € et y' billets de 11 €. La transaction est réalisée si $7(x - x') + 11(y - y') = S$. Notons que x, x', y et y' sont des entiers *naturels*. Or, d'après la question 1(a), puisque 7 et 11 sont premiers entre eux, il existe un couple (X, Y) d'entiers *relatifs* solution de l'équation $7X + 11Y = S$. Par un choix convenable de x, x', y et y' on peut alors faire en sorte que $X = x - x'$ et $Y = y - y'$, ce qui prouve que la transaction est réalisable.

(ii) On est maintenant dans la situation où, avec les notations précédentes, $x' = y' = 0$. Il s'agit donc de résoudre l'équation $7x + 11y = S$ en entiers *naturels*. D'après 1(b), cela est réalisable dès lors que $S > 7 \cdot 11 - 7 - 11 = 59$. Donc toute somme au moins égale à 60 € est payable. En revanche, on ne peut pas payer 59€. Sinon, il existerait un couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $7x + 11y = 59$. Notons que, puisque y est positif ou nul, on a alors nécessairement $7x \leqslant 59$, soit $x \leqslant 8$, et de même $11y \leqslant 59$, soit $y \leqslant 5$. En outre, on aurait alors $7(x+1) + 11(y+1) = 59 + 7 + 11 = 77$, soit $7(x+1) = 77 - 11(y+1) = 11(7 - y - 1)$. En particulier, $7(x + 1)$ serait divisible par 11, d'où l'on déduit, par le lemme de Gauss, que $x + 1$ serait divisible par 11, puisque 7 et 11 sont premiers entre eux. Or $1 \leqslant x + 1 \leqslant 9$ (puisque x est positif et $x \leqslant 8$), d'où une contradiction.

Exercice 3.

a. La suite $(A_n)_n$ est décroissante car,

$$A_{n+1} = A_n - x_{2(n+1)-1} + x_{2(n+1)} = A_n - x_{2n+1} + x_{2n+2} \leqslant A_n$$

puisque la suite $(x_n)_n$ est décroissante. Montrons ensuite que $A_n \geqslant 0$:

$$A_n = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(x_{2k} - x_{2k+1})\right] + x_{2n} \geqslant x_{2n} \geqslant 0$$

puisque $x_{2k} - x_{2k+1} \geqslant 0$, la suite $(x_n)_n$ étant décroissante.

b. De la même manière, $B_{n+1} = B_n + x_{2n+2} - x_{2n+3} \geqslant B_n$, et

$$B_n = x_0 + \left[\sum_{k=1}^{n}(-x_{2k-1} + x_{2k})\right] - x_{2n+1} \leqslant x_0 - x_{2n+1} \leqslant x_0.$$

c. La suite $(A_n)_n$ est décroissante minorée et la suite $(B_n)_n$ est croissante majorée. Elles sont donc toutes deux convergentes. Comme $A_n - B_n = x_{2n+1}$, par hypothèse, on a $\lim_{n\mapsto+\infty} A_n - B_n = 0$, ce qui montre qu'elles ont même limite. Enfin, comme $S_{2n} = A_n$ et $S_{2n+1} = B_n$, on conclut que la suite $(S_n)_n$ converge vers la limite commune des suites $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$.

Exercice 4.

a. La définition de f montre que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|$. Ceci implique $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui donne la continuité de f en 0.

b. Supposons $x_0 \neq 0$. On sait qu'il existe une suite $(a_n)_n$ de nombres rationnels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ et une suite $(b_n)_n$ de nombres irrationnels vérifiant aussi $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$. Si f était continue en x_0, on aurait donc $\lim_{n\mapsto\infty} f(a_n) = f(x_0)$ et $\lim_{n\mapsto\infty} f(b_n) = f(x_0)$, c'est-à-dire $0 = f(x_0)$ et $\lim_{n\mapsto\infty} b_n = f(x_0)$, ce qui implique $x_0 = 0$ contrairement à l'hypothèse.