

---

## Feuille n° 3

---

### NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 1.** Mettre sous la forme  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) les nombres :

$$\frac{3 + 6i}{3 - 4i} \quad ; \quad \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i} \quad ; \quad \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}.$$

**Exercice 2.** Écrire sous la forme  $a + ib$  les nombres complexes suivants :

- Nombre de module 2 et d'argument  $\pi/3$ .
- Nombre de module 3 et d'argument  $-\pi/8$ .

**Exercice 3.** Calculer le module et l'argument de  $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  et  $v = 1 - i$ . En déduire le module et l'argument de  $w = \frac{u}{v}$ .

**Exercice 4.** Calculer les racines carrées de 1,  $i$ ,  $3 + 4i$ ,  $8 - 6i$ , et  $7 + 24i$ .

**Exercice 5.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0$ .
- $z^3 + 3z - 2i = 0$ .

**Exercice 6.** Soit  $P$  le polynôme :  $P(x) = x^5 + x^4 - 2x - 2$ .

- Trouver une racine «évidente» et factoriser  $P$ .
- Quelles sont les racines de  $P$  dans  $\mathbb{N}$ ? Dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 7.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

- $\left|\frac{z - 3}{z - 5}\right| = 1$ ,
- $\left|\frac{z - 3}{z - 5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exercice 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On pose  $S_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ .

- Calculer  $(1 - z)S_n(z)$ .
- En déduire  $S_n(e^{\frac{2i\pi}{n}})$ .
- Quelles sont les racines de  $S_3$ ? Placez-les sur une figure.
- Calculer les sommes  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta)$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta)$  pour  $\theta$  un nombre réel quelconque.

**Exercice 9.** Montrer que pour  $u, v \in \mathbb{C}$ , on a  $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ .