Feuille n° 8

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.

b. $2x' - x = 0$ avec $x(0) = 1$.

c. $y' = xy$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 2. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' - y = 0.$$

Quelle est la solution passant par le point $M = (1, 2)$?

Exercice 3.

a. Vérifier que $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 2$ est solution de $y' + y = x^2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de $y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2)$.

c. En déduire les solutions de $y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2) + x^2$.

Exercice 4.

a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(x - 1)y' + (x - 2)y = x(x - 1)^2$ vérifiant la condition $y(0) = 0$.

b. Vérifier que la fonction trouvée sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ est prolongeable en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit l'équation différentielle $(E) : xy' - y = \ln(x)$.

a. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}^*$.

b. Existe-t-il une solution continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6. Trouver l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = 0, \quad 9y'' + 24y' + 16y = 0,$$
$$y'' - 3y' - y = 0, \quad y'' + 12y' = 0.$$

Exercice 7. Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

a. $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$.

b. $9y'' + 24y' + 16y = 0$ et $y'(2) = -3$.

c. $y'' - 3y' - y = 0$ et $y'(-1) = 2$.

d. $xy' + y = 1$ et $y(1) = 1$, sur $]0, +\infty[$.

e. $y'' - 4y' + 3y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$.

f. $x'' - 6x' + 9x = 0$ et $x'(0) = 2$.

g. $\theta'' + 9\theta = 0$ et $\theta(\pi/2) = \theta'(\pi/2) = 0$.

Exercice 8.

a. Montrer que l'équation différentielle $y'' + 3y' - 4y = 0$ possède une unique solution telle que $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

b. Montrer que l'équation différentielle $y''+4y'+5y = 0$ n'admet *aucune* solution telle que $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$; par contre, elle admet une infinité de solutions telles que $y(0) = y(2\pi) = 0$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème du cours ?

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' + 2y' + 3y = \cos(t)$, en cherchant une solution particulière de la forme $\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$.

b. $y'' - y' - y = -e^{3t}$, en cherchant une solution particulière de la forme αe^{3t}.

c. $y''-y'-y = e^t \sin(2t)$, en cherchant une solution particulière de la forme $\alpha e^t \sin(2t)+\beta e^t \cos(2t)$.

Exercice 10.

a. Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = \cos(t) + \sin(t)$ ne peut avoir aucune solution du type $\alpha \cos t + \beta \sin t$.

b. La résoudre en cherchant une solution particulière du type $\alpha t \cos t + \beta t \sin t$.

Exercice 11. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$.

b. $y'' - 2y' + y = e^x - x - 1$.