Feuille n° 4

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$$u_n = \ln(n+2) - \ln(n)$$

a. Trouver un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| < 10^{-3}$.

b. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} = 0$ en utilisant la définition.

Exercice 2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} + e^{-n}$. Déterminer le sens de variation de u_n et montrer que la suite est bornée.

Exercice 3. Montrer que la suite $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+2}$ converge vers $3/2$ en utilisant la définition de la convergence.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{2n\pi}{3}$. Montrer que u_{3n} est convergente. La suite u_n est-elle convergente ?

Exercice 5. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. [*On pourra majorer* $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.]

Exercice 6. Etudier la convergence et éventuellement calculer la limite de la suite

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

avec $a > 0, b > 0$.

Exercice 7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Montrer que cette suite converge. [*On pourra montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geqslant 2^{n-1}$.]

Exercice 8. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

et

$$b_0 = b, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 9. Etudier la suite suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases}$$

Exercice 10. On considère la suite u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$, et déterminer le sens de variation.