

Devoir n° 1

À rendre pour le premier TD de la semaine du 29/09.
*Notez lisiblement la lettre de votre section suivie de votre numéro de groupe
dans le coin supérieur droit de votre copie.*

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Trouver les nombres complexes z et u solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} (2+i)z - iu & = 2+i \\ (1+i)z + (2-i)u & = 2i \end{cases}$$

Exercice 2. Soient u et v des nombres complexes. Démontrer l'égalité

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = 4\operatorname{Re}(u\bar{v}).$$

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Exercice 3. Dessiner dans le plan complexe les domaines définis par :

$$D_1 = \{z : |z| > 1\} \quad ; \quad D_2 = \{z : z + \bar{z} > -1\} \quad ; \quad D_3 = \{z : z(1-i) + \bar{z}(1+i) = 4\}.$$

[Pour D_2 et D_3 , on pourra utiliser l'écriture algébrique.]

TRIGONOMÉTRIE

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :

1. $|\sin(x)| + |\cos(x)| = 0$,
2. $|\sin(x)| + |\cos(x)| = 2$,
3. $2\cos^2(x) - 7\cos(x) + 3 = 0$.

Exercice 5. Soit $z := e^{2i\pi/5}$.

1. Constater que $z^5 = 1$, puis en déduire que $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. On pose $u := z + z^{-1} = 2\cos(2\pi/5)$. Déduire de la question précédente une équation du second degré dont u est solution.
3. Résoudre cette équation et en déduire une formule explicite pour $\cos(2\pi/5)$.
4. En déduire une formule pour $\cos(\pi/5)$, puis $\cos(\pi/10)$.