Devoir n° 2

À rendre pour le premier TD de la semaine du 13 octobre.
Notez lisiblement la lettre de votre section suivie de votre numéro de groupe dans le coin supérieur droit de votre copie.

INÉGALITÉS

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante :

$$\sqrt{|x^2+2x-3|} \leq \frac{x}{2}+2.$$

Exercice 2. Résoudre l'inégalité suivante :

$$2|x-2| - \sqrt{x^2-1} \geq 3.$$

On commencera par déterminer l'ensemble des x pour lesquels l'inégalité est bien définie.

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 3.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Soit z_0 une des solutions de cette équation. En séparant parties réelle et imaginaire de $z_0^2 - 2\cos(\theta)z_0 + 1$, retrouver les formules de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 4.

1. Vérifier que
$$-8+2\sqrt{3}+i(12+4\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3})^2.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré
$$Z^2 + (\sqrt{3}-1)Z + (3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})) = 0.$$
3. Mettre les racines de l'équation précédente sous forme trigonométrique puis calculer leurs racines n-ièmes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. À l'aide des questions précédentes, résoudre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation en z
$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^{2n} + (\sqrt{3}-1)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{n} + (3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})) = 0.$$

RÉCURRENCE

Exercice 5. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
[*Écrire* $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n}(3^2-2) + 2(3^{2n}-2^n)$.]

PROBLÈME (facultatif)

Exercice 6. Le but de ce problème est de déterminer tous les triplets pythagoriciens, c'est-à dire les triplets (a, b, c) d'entiers naturels qui vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. On note $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. On note aussi pour $r \in \mathbb{R}$, $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = r(x + 1)\}$.

1. Montrer qu'à un triplet pythagoricien (a, b, c) correspond un point du cercle à coordonnées rationnelles positives $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. Réciproquement, montrer que si $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ est un point du cercle à coordonnées rationnelles positives, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, le triplet (ma, mb, mc) est pythagoricien.

2. Soit $r \in \mathbb{R}$. L'intersection $C \cap D_r$ est constitué de deux points, dont l'un est le point A d'affixe -1. Calculer explicitement en fonction de r l'affixe $z_r = x_r + iy_r$ de l'autre point d'intersection M_r. Peut-on exprimer simplement r en fonction d'un argument θ_r de z_r ? Dans quel intervalle doit se situer r pour que x_r et y_r soient positifs ? Faire un dessin.

3. Soit $M \in C$. Montrer que les coordonnées de M sont rationnelles si et seulement si il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $M \in C \cap D_r$.

4. En écrivant $r = p/q$, avec p et q premiers entre eux, exprimer à l'aide de la question 2) l'ensemble des points du cercle à coordonnées rationnelles positives en fonction de p et q.

5. Déduire des questions 1) et 4) que l'ensemble des triplets pythagoriciens est :

$$S = \left\{(m(q^2 - p^2), 2mpq, m(p^2 + q^2)) \mid m \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \leq q\ ,\ p \text{ premier avec } q\right\}.$$