Corrigé du devoir n° 2

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\left|x^2+2x-3\right|$ est toujours positif donc $\sqrt{|x^2+2x-3|}$ est bien défini pour tout x dans $\mathbb{R}$ et est un nombre positif. Pour que x vérifie l'inégalité, il faut donc nécéssairement que $x/2+2$ soit positif, c'est-à-dire $x \geq -4$.

$$\mathcal{S} \subset [-4, +\infty[$$

Pour $x \geq -4$, les deux membres de l'inégalité sont positifs. La fonction “carré” étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, les nombres $\sqrt{|x^2+2x-3|}$ et $x/2+2$ sont rangés comme leurs carrés. Sur $[-4, +\infty[$, l'inégalité est équivalente à

$$\left|x^2+2x-3\right| \leq \frac{x^2}{4} + 2x + 4.$$

Étudions le signe de x^2+2x-3. Ses racines sont -3 et 1. Donc x^2+2x-3 est positif sur $[-4,-3] \cup [1,+\infty[$ et strictement négatif sur $]-3,1[$.

- Pour $x \in [-4,-3] \cup [1,+\infty[$, $\left|x^2+2x-3\right| = x^2+2x-3$. Pour de tels x, l'inégalité est équivalente à $\frac{3}{4}x^2 - 7 \leq 0$ ou encore $x \in [-\frac{2}{3}\sqrt{21}, \frac{2}{3}\sqrt{21}]$. Comme $-4 < -\frac{2}{3}\sqrt{21} < -3$ et $\frac{2}{3}\sqrt{21} > 1$, on a :

$$\mathcal{S} \cap ([-4,-3] \cup [1,+\infty[) = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{21}, -3\right] \cup \left[1, \frac{2}{3}\sqrt{21}\right]$$

- Pour $x \in]-3,1[$, $\left|x^2+2x-3\right| = -x^2-2x+3$. Pour de tels x, l'inégalité est équivalente à $\frac{5}{4}x^2+4x+1 \geq 0$. Les zéros du trinôme $\frac{5}{4}x^2+4x+1$ sont $\frac{-8-2\sqrt{11}}{5}$ et $\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}$ qui sont tous les deux dans l'intervalle $]-3,1[$. Comme $\frac{5}{4}x^2+4x+1$ est positif a l'extérieur de ses racines, on a :

$$\mathcal{S} \cap]-3,1[= \left]-3, \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}, 1\right[$$

Finalement, l'ensemble des solutions, étant compris dans $[4, +\infty[$ est égal à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= (\mathcal{S} \cap ([-4,-3] \cup [1,+\infty[)) \cup (\mathcal{S} \cap]-3,1[) \\
&= \left[-\frac{2}{3}\sqrt{21}, -3\right] \cup \left[1, \frac{2}{3}\sqrt{21}\right] \cup]-3, \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}] \cup \left[\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}, 1\right[\\
&= \left[-\frac{2}{3}\sqrt{21}, \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{3}\sqrt{21}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 2. Pour que l'expression soit définie, il faut que x^2-1 soit positif. Donc l'inéquation n'a de sens que sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. On distingue 2 cas suivant le signe de $|x-2|$ afin de supprimer les valeurs absolues.

- Pour $x \in]-\infty,-1] \cup [1,2]$:

  $x-2$ est négatif. Donc pour ces x, l'inégalité est équivalente à : $4-2x-\sqrt{x^2-1} \geq 3$ ou encore $\sqrt{x^2-1} \leq 1-2x$. Le membre de gauche de la dernière inéquation est toujours positif. Le membre de droite est strictement négatif pour $x > 1/2$ (c'est-à-dire pour $x \in [1,2]$) donc l'inéquation n'est pas vérifiée.

Pour $x \leq 1/2$, les deux membres de l'inégalité sont positifs. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Pour $x \in]-\infty, 1]$, l'inéquation est équivalente à $x^2 - 1 \leq 1 - 4x + 4x^2$ ou encore $3x^2 - 4x + 2 \geq 0$. Le discriminant de $3x^2 - 4x + 2$ étant strictement négatif, $3x^2 + 4x + 2$ est positif (strictement) sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $x \in [-\infty, 1]$. Donc l'inégalité est vérifiée sur tout $]-\infty, -1]$.

$$\mathcal{S} \cap (]-\infty, -1] \cup [1, 2]) =]-\infty, -1]$$

- Pour $x \in]2, +\infty[$:

  $x - 2$ est positif. L'inégalité est équivalente à $2x - 4 - \sqrt{x^2 - 1} \geq 3$ ou encore $2x - 7 \geq \sqrt{x^2 - 1}$. Pour $x < 7/2$, le membre de gauche de la dernière inéquation est strictement négatif donc l'inégalité n'est pas vérifiée.

  Pour $x \geq 7/2$, les deux membres sont positifs. Donc, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ces deux nombres sont rangés comme leurs carrés. Pour $x \in [7/2, +\infty[$, l'inéquation est équivalente à $4x^2 - 28x + 49 \geq x^2 - 1$ ou encore $3x^2 - 28x + 50 \geq 0$. Les zéros de $3x^2 - 28x + 50$ sont $\frac{14}{3} - \frac{\sqrt{46}}{3}$ et $\frac{14}{3} + \frac{\sqrt{46}}{3}$. Seul le deuxième est dans $[7/2, +\infty[$. Donc sur cet intervalle, $3x^2 - 28x + 50 \geq 0$ est équivalent à $x \geq \frac{14}{3} + \frac{\sqrt{46}}{3}$. On a donc :

$$\mathcal{S} \cap]2, +\infty] = \left[\frac{14}{3} + \frac{\sqrt{46}}{3}, +\infty\right[$$

Pour conclure, on regroupe les solutions trouvées sur chacun des domaines$]-\infty, -1] \cup [1, 2]$ et $]2, +\infty]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (\mathcal{S} \cap (]-\infty, -1] \cup [1, 2])) \cup (\mathcal{S} \cap]2, +\infty]) \\ &=]-\infty, -1] \cup \left[\frac{14}{3} + \frac{\sqrt{46}}{3}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Exercice 3. L'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (2\cos(\theta))^2 - 4 = -4\sin(\theta)^2$. Les racines carrées de Δ sont $2i\sin(\theta)$ et $-2i\sin(\theta)$. Les solutions de l'équation sont donc $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ et $\cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}$.

Soit $z_0 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Alors $z_0^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ par la formule de Moivre. On a donc :

$$z_0^2 - 2\cos(\theta)z_0 + 1 = \cos(2\theta) - 2\cos(\theta)^2 + 1 + i(\sin(2\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)) = 0.$$

Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on a en identifiant parties réelle et imaginaire :

$$\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1, \quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Exercice 4.

1. Développons le carré du membre de droite :

$$(1 + \sqrt{3} + i2\sqrt{3})^2 = (1 + \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 + 2i(1 + \sqrt{3})(2\sqrt{3}) = -8 + 2\sqrt{3} + i(12 + 4\sqrt{3})$$

2. Soit (E) l'équation

$$Z^2 + (\sqrt{3} - 1)Z + (3 - \sqrt{3} - i(3 + \sqrt{3})) = 0.$$

   Son discriminant vaut

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sqrt{3} - 1)^2 - 4(3 - \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})) = 3 + 1 - 2\sqrt{3} - 12 + 4\sqrt{3} + 4i(3 + \sqrt{3}) \\ &= -8 + 2\sqrt{3} + i(12 + 4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

D'aprés la première question, les deux racines carrées de Δ sont $\delta = 1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3}$ et $-\delta$. Les solutions de l'équation sont

$$Z_1 = \frac{-\sqrt{3}+1+\delta}{2} = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{3}+1-\delta}{2} = -\sqrt{3}(1+i) = \sqrt{6}e^{i5\pi/4}$$

3. Les racines nièmes de Z_1 sont les nombres $2^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n})}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Les racines nièmes de Z_2 sont les nombres $6^{\frac{1}{2n}}e^{i(\frac{5\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Remarquez bien que Z_1 et Z_2 ont chacun n racines nièmes distinctes, comme tout nombre complexe non nul.

4. Soit (E') l'équation

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^{2n} + (\sqrt{3}-1)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{n} + (3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})) = 0.$$

On peut résoudre (E') par la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E') &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z}\right)^{n} \text{ est solution de } (E) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z}\right) \text{ est une racine nième de } Z_1 \text{ ou } Z_2 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{1-2^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n})}} \text{ ou } z = \frac{1}{1-6^{\frac{1}{2n}}e^{i(\frac{5\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}} \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ s'écrit :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{1-2^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n})}} \ ; \ 0 \leq k \leq n-1\right\} \cup \left\{\frac{1}{1-6^{\frac{1}{2n}}e^{i(\frac{5\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}} \ ; \ 0 \leq k \leq n-1\right\}.$$

Exercice 5. Soit $P(n)$ la propriété : "$3^{2n+2}-2^{n+1}$ est divisible par 7". Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $P(0)$ est vraie. En effet, $3^{0+2}-2^{0+1} = 9-2 = 7$ est divisible par 7.

Hérédité. Supposons qu'il existe k entier positif tel que $P(k)$ est vraie. Montrons alors que $P(k+1)$ est vraie.

$$3^{2(k+1)+2}-2^{(k+1)+1} = 3^{2k+4}-2^{k+2} = 3^{2k+2}(3^2-2)+2(3^{2k+2}-2^k)$$

3^2-2 est égal à 7 donc $3^{2k+2}(3^2-2)$ est divisible par 7. De plus $3^{2k+2}-2^k$ est divisible par 7 d'aprés l'hypothèse de récurrence, donc $2(3^{2k+2}-2^k)$ aussi. On en déduit que $3^{2(k+1)+2}-2^{(k+1)+1}$ est divisible 7, comme somme de deux multiples de 7 : $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'aprés le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n positif.

Exercice 6. [*Facultatif*]

1. Soit (a,b,c) un triplet pythagoricien différent de $(0,0,0)$. Alors, comme $c > 0$, on a en divisant par c^2 : $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Donc le point de coordonnées $(a/c, b/c)$ est un point du cercle trigonométrique puisqu'il satisfait l'équation $x^2+y^2=1$. Réciproquement, si $(a/c, b/c)$ est un point du cercle unité, alors $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, donc en multipliant par m^2c^2, on obtient :

$$(ma)^2+(mb)^2 = (mc)^2$$

ce qui signifie que (ma, mb, mc) est un triplet pythagoricien.

2. Un point de l'intesection $C \cap D_r$ de coordonnées a des coordonnées (x, y) qui satisfont à la fois l'équation du cercle et celle de la droite D_r. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} y^2 & = & 1 - x^2 \\ y & = & r(x+1) \end{cases}$$

En élevant la deuxième équation au carré et en soustrayant la première, on voit que x est nécessairement solution de l'équation du deuxième degré :

$$(1 + r^2)x^2 + 2r^2x + r^2 - 1 = 0$$

dont les solutions sont $x = 1$ et $x = \frac{1-r^2}{1+r^2}$. La deuxième équation permet de déterminer les y correspondant à ces x. On montre ainsi que l'ensemble des solutions du système est inclus dans $\left\{(-1, 0)\ ,\ \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2}\right)\right\}$. On vérifie que ces deux couples sont bien solutions du système, ce qui montre que les deux points d'intersection de D_r et C sont bien les deux points d'affixe -1 et $z_r = \frac{1-r^2}{1+r^2} + i\frac{2r}{1+r^2}$. Si θ_r est un argument de z_r, alors $x_r = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ et $r = \frac{y}{x+1} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Pour que x_r et y_r soient positifs, il faut et il suffit que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, et donc que $0 \leq r \leq 1$.

3. Supposons que tout d'abord qu'il existe un $r \in \mathbb{Q}$ tel que $M \in C \cap D_r$. De deux choses l'une : soit M a pour affixe -1, et est donc à coordonnées rationnelles, soit M a pour affixe z_r dont les parties réelles et imaginaires sont des fractions rationnelles (des quotients de polynômes) en $r \in \mathbb{Q}$, et donc elles-même dans $\mathbb{Q}$.

   Supposons maintenant que M est à coordonnées rationnelles. Soit M a pour affixe -1, et dans ce cas M est dans $C \cap D_r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, Soit l'abscisse de M est différente de -1, et dans ce cas on pose $r = y/(x + 1)$ (c'est un nombre rationnel !). Dans ce cas M est sur le cercle par hypothèse et sur la droite D_r par définition de r, ce qui termine la démonstration.

4. Les points à coordonnées positives rationnelles sur le cercle unité sont les points de la forme $\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2}\right)$ avec $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. En écrivant $r = \frac{p}{q}$, avec $p \leq q$ et p premier avec q, on a que l'ensemble des points à coordonnées positives rationnelles sur le cercle unité est :

$$\mathcal{W} = \left\{ \left(\frac{q^2 - p^2}{p^2 + q^2}, \frac{2pq}{p^2 + q^2}\right) \mid p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \leq q,\ p \text{ premier avec } q \right\}$$

5. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens et $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{T} = \left\{(m(q^2 - p^2), 2mpq, m(p^2 + q^2)) \mid m \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \leq q\ ,\ p \text{ premier avec } q\right\}.$$

   Il faut montrer que ces deux ensembles sont égaux. Montrons d'abord que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien. Alors d'après la question 1), $(a/c, b/c)$ est un point du cercle unité à coordonnés rationnelles positives que l'on peut écrire $\left(\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}, \frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$ d'après la question 4). Les deux fractions $\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$ et $\frac{2pq}{p^2+q^2}$ sont sous forme irréductible car p et q sont premiers entre eux. Donc c est un multiple de $p^2 + q^2$. En posant $c = m(p^2 + q^2)$, on trouve que $(a, b, c) = (m(q^2 - p^2, 2mpq, m(p^2 + q^2))$. Donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

   Il suffit de vérifier que tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont des triplets pythagoriciens, ce qui se vérifie facilement par calcul :

$$(m(q^2 - p^2))^2 + (2mpq)^2 = m^2(q^4 + p^4 - 2p^2q^2 + 4p^2q^2) = m^2(p^2 + q^2)^2$$

   Donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Par double inclusion, on a montré que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.