Feuille n^o 3

Logique et raisonnements

Exercice 1. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.

1. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair ,
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 2. Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles "$\forall$", "et", "ou", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 3. Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
3. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, y^2 > x$,
4. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 4.

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

Exercice 5. Montrer que $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.

★ **Exercice 7.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n^3 - n$ est divisible par 6 ,

2. $n^5 - n$ est divisible par 30 ,

3. $n^7 - n$ est divisible par 42 .

[*Indication : Pour 1, on peut factoriser* $n^3 - n$ *pour voir que ce nombre est multiple de 2 et de 3. Les cas 2 et 3 peuvent se traiter de façon analogue.*]

Exercice 8. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n \ .$$

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

$$P_n \ : 3 \text{ divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n \ : 3 \text{ divise } 4^n + 1 \ .$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow Q_n$?

Fonctions

Exercice 10. Donner un exemple de fonction f définie sur $I = [0, 2]$ telle que :

- $f(I)$ ne soit pas un intervalle.
- $f(I)$ soit un intervalle fermé borné.
- $f(I)$ soit un intervalle ouvert borné.
- $f(I)$ soit un intervalle non borné.

Exercice 11. Donner un exemple de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f\ o\ g \neq g\ o\ f$.

Exercice 12.

1. Montrer que : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad 4ab \leq (a+b)^2$.
2. Déterminer les domaines de définition des fonctions :
$$f(x) = 2\sqrt{x(1-x)} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 3 \quad ,$$
que l'on note D_f et D_g.
3. En utilisant 1, donner un encadrement des éléments de $f(D_f)$. Faire de même pour $g(D_g)$.
4. Montrer que $g\ o\ f$ est bien définie sur D_f. Qu'en est-il pour $f\ o\ g$?

Notion de limite

Exercice 13.

1. Ecrire la division euclidienne de $(x^3 - 13x + 18)$ par $(x - 2)$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+3xsin(x)-13x+6}{xsin(x)-4}$. Montrer que f est définie au voisinage de 2 et montrer, en utilisant les théorèmes sur les limites, que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

3. En revenant à la définition de la limite, montrer, à l'aide d'une majoration de $|f(x)-3|$, que la limite de f en 2 existe et vaut 3.

Exercice 14. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) > 0) \qquad \text{et} \qquad (\exists\, l \in \mathbb{R}^\times \;/\; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l) \quad .$$

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
2. Montrer que si $l > 0$, alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Calculs de limites

Exercice 15. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degrés respectifs n et m. Etudier, suivant les valeurs de n, m et de certains coefficients de P et Q, la limite de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On rappelle les limites suivantes (à connaître) :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad .$$

Lorsque les limites suivantes existent, les déterminer :

$a.\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$	$b.\ \lim_{x\to1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$
$c.\ \lim_{x\to n} \sin(\pi(x-E(x)))$	$d.\ \lim_{x\to n} (1-xE(x))(x-E(x))$
$e.\ \lim_{x\to0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$	$f.\ \lim_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
$g.\ \lim_{x\to1} \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{(x-1)^2}$	$h.\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
$i.\ \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}+x)$	$j.\ \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$
$k.\ \lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$	$l.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$
$m.\ \lim_{x\to1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$	$n.\ \lim_{x\to0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$
$o.\ \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$	$p.\ \lim_{x\to0} \frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1}$