Mathématiques pour Informaticiens – Série 1

1. *2 points* Calculer la distance $d(x,y) = \|x-y\|$ entre les deux points $x = (-2,2,-3)$ et $y = (1,1,2)$ en utilisant les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
2. *8 points* Pour chacune des définitions suivantes, déterminer si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ ou non, et justifier vos conclusions.
   (a) $\|x\| = (|x_1| + |x_2|)^2$,
   (b) $\|x\| = |x_1 - 2x_2|$,
   (c) $\|x\| = 2|x_1| + \min(|x_1|, |x_2|)$,
   (d) $\|x\| = |x_1| + 3\max(|x_1|, |x_2|)$.
3. *7 points* Vérifier que
$$\|x\| = 2\min(|x_1|, |x_2|) + 3\max(|x_1|, |x_2|)$$
est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner le disque unité
$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \|x\| \le 1\}.$$
Démontrer que cette norme est équivalente à la norme euclidienne, c.-à-d. trouver des constantes positives C_1, C_2 telles que
$$C_1 \cdot \|x\|_2 \le \|x\| \le C_2 \cdot \|x\|_2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2 .$$
4. *10 points* Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$
5. *6 points* Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|.$$
6. *7 points* Dessiner les ensembles suivants, et déterminer s'ils sont ouverts, fermés, bornés :
$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -2 \le y \le 1\},\\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \cdot y < -1\},\\
C_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 < \|x\|_2 < 1\},\\
C_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \le \|x\|_2 < 1\},\\
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + x + y > 1 \ \text{ ou } \ x^2 + y^4 = 0\},\\
E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 1/n\, , \; y = e^{-\sqrt{n}}\, , \; n = 1, 2, \ldots\},\\
F &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 1/n\, , \; y = \sqrt{n}\, , \; n = 1, 2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

- Les exercices
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.