Mathématiques pour Informaticiens – Série 2

1. *4 points* Considérons la suite de vecteurs

$$x_n = \left((-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}, (-1)^{[n/3]} \right)$$

où $[a]$ dénote la partie entière de a. Dessiner plusieurs points de cette suite, démontrer qu'il s'agit d'une suite bornée, et trouver une sous-suite convergente.

2. *7 points* Parmi les ensembles de l'exercice 6 de la série précédente, lesquels sont compacts ?

3. *9 points* Où les fonctions suivantes sont-elles continues ?

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{1 + 2x_2^2}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \log(x_1 + x_2^4) & \text{si } x_1 > 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} & \text{si } x_1 \neq x_2, \\ 2x_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. *10 points* Soient p et q deux réels positifs avec $1/p + 1/q = 1$.

   (a) Montrer que pour tout couple (x, y) de nombres positifs, on a

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q. \tag{1}$$

   En déduire que pour tous $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ positifs :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

   (b) Etablir pour finir l'inégalité de Minkowski : pour $p \geq 1$, on a pour tous $(u_1, ..u_n, v_1, .., v_n)$:

$$\left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   (c) En déduire que pour tout $p \geq 1$, $\| \cdot \|_p$ définit une norme sur l'ensemble des suites de nombres complexes.

5. *10 points* Écrire un programme (dans le langage de votre choix) qui dessine le triangle de Sierpiǹski. Il existe deux algorithmes différents.

   Algorithme récursif : Tracer le triangle équilatéral initial. Couper le triangle en quatre.

Répéter cette opération de façon récursive pour les sous-triangles 1, 2 et 3 (jusqu'à une profondeur de récursion maximale).

Algorithme probabiliste : Dessiner les 3 sommets du triangle équilatéral initial. Choisir au hasard un des trois sommets, que l'on dénote par x_0. À chaque étape :

- choisir au hasard un des trois sommets, appelons le résultat z
- parcourir une mi-distance entre x_n et z, *i.e.* $x_{n+1} = (x_n + z)/2$
- dessiner le nouveau point x_{n+1}.

Continuer ce processus suffisamment longtemps (environ 10000 points ou plus) pour pouvoir observer le triangle de Sierpiǹski.

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

- Les exercices
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.