## Mathématiques pour Informaticiens – Série 3

1. *6pts* Pour chacune des suites de fonctions suivantes, trouver la fonction limite (c.-à-d. une fonction $f$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). Ensuite, déterminer si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f_n(x,y) = \begin{cases} (1 - n|x - \frac{1}{n}|)\sin(y) & \text{si } 0 \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

   (b) $f_n(x,y) = [\cos(x)\cos(y)]^{2n}$,

   (c)
   $$f_n(x,y) = \begin{cases} |x - \frac{1}{2}|^n \cos(y) & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. *4pts* Déterminer si les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ suivantes sont orthogonales, et si les matrices $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont unitaires.

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$
   $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ i & -2i \end{bmatrix}.$$

3. *5pts* Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la matrice
   $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$
   En considérant une nouvelle base
   $$S_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   de $\mathbb{R}^3$ et une nouvelle base
   $$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
   de $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice représentant $f$ dans ces nouvelles bases ?

4. *5pts* Soit
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Trouver une matrice orthogonale $U$ telle que $U^{\mathrm{T}}AU$ soit sous forme triangulaire.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

**Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :**

– Les exercices

– Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.