

Mathématiques pour Informaticiens – Série 3
SOLUTIONS

1. 6 points

- (a) $f_n(x, y)$ vaut 0 pour $x \geq \frac{2}{n}$ et $x \leq 0$. Or pour tout $x > 0$, il existe N entier positif tel que $x > \frac{2}{N}$. Donc, pour tout x , il existe $N \geq 0$ entier tel que $f_n(x, y) = 0$ pour tout $n \geq N$ et tout $y \in \mathbb{R}$, donc f_n admet une limite simple et pour tout x, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = 0.$$

La convergence n'est pas uniforme car $\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f_n(x, y) = 1$ pour tout entier positif n .

- (b) $f_n(x, y)$ tend vers 0 partout sauf aux points $(k\pi, j\pi)$. La convergence ne peut être uniforme car la fonction limite n'est pas continue.
- (c) $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. La suite de fonctions tend donc uniformément vers 0.

2. Il suffit de faire le produit de chaque matrice avec sa transposée conjuguée et de vérifier si on a obtenu la matrice identité.

- A n'est pas orthogonale,
- B est orthogonale,
- C est unitaire,
- D n'est pas unitaire.

3. On dénote par \mathbf{S} la matrice qui a pour colonnes les vecteurs de la nouvelle base, c.-à-d.

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3],$$

et de façon similaire

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2].$$

La représentation matricielle de l'application linéaire dans ces nouvelles base est donnée par $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Mat}(f)\mathbf{S}$. On obtient d'abord $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ puis

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -13 & 2 & -14 \\ -11 & 1 & -13 \end{bmatrix}.$$

4. On calcule d'abord les valeurs propres de A . Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 5$. Les valeurs propres sont donc -1 et 5 . Les vecteurs propres associés sont $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ respectivement. La matrice U doit avoir pour première colonne un vecteur propre, et pour deuxième colonne un vecteur orthogonal au premier, soit :

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ou

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. On pose

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\mathbf{U}_1^* \mathbf{A} \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La sous-matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres : $(3 + i\sqrt{23})/2$ et $(3 - i\sqrt{23})/2$. Les vecteurs propres associés sont respectivement $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{15}}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1-i\sqrt{23}}{6} \end{bmatrix}$ et son conjugué $\bar{\mathbf{v}}$. Nous pouvons alors poser \mathbf{U}_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \frac{1-i\sqrt{23}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{15}}{5} \frac{1-i\sqrt{23}}{6} & \frac{\sqrt{15}}{5} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \frac{1+i\sqrt{23}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{15}}{5} \frac{1+i\sqrt{23}}{6} & \frac{\sqrt{15}}{5} \end{bmatrix}$$

Nous posons $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2$ qui est unitaire et vaut

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15} (1-i\sqrt{23})}{5 \cdot 6} \\ 0 & -\frac{1-i\sqrt{23}}{6} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou au choix

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15} (1+i\sqrt{23})}{5 \cdot 6} \\ 0 & -\frac{1+i\sqrt{23}}{6} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U}$.