Mathématiques pour Informaticiens – Série 5
SOLUTIONS

1. Nous avons :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,m}(|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|)\\ &\leq \max_{i=1,\dots,m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)\|\boldsymbol{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc, $\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \max\limits_{i=1,\dots,m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)$. Choisissons un i_0 pour lequel :

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0j}| = \max_{i=1,\dots,m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|).$$

Il y a égalité pour $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_j = \pm 1$ et est de même signe que a_{i_0j}. Donc, $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)$.

Pour la norme $\| \ \|_2$, on procède en deux étapes. D'abord,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\|_2 &= \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{y}\|_2=1}\langle\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_2\\ &= \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{y}\|_2=1}\langle\mathbf{A}\boldsymbol{x},\mathbf{A}\boldsymbol{y}\rangle_2\\ &= \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|_2\\ &= \|\mathbf{A}\|_2.\end{aligned}$$

2. La forme bilinéaire de départ, écrite sous forme matricielle, est

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + 0.$$

où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & -3\\-3 & 2\end{bmatrix}$. Diagonalisons la matrice $\mathbf{A}$. Le polynôme caractéristique est X^2-4X-5. Les valeurs propres sont 5 et -1. Un vecteur propre unitaire associé à 5 est $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Un vecteur propre unitaire associé à -1 est $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Donc en notant

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

on a

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{-\frac{\pi}{4}}\mathbf{A}\mathbf{R}_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

. Donc la courbe $f(\boldsymbol{x}) = 0$ est la courbe $g(\boldsymbol{x}) = 0$ tourné de $\pi/4$ radians dans le sens direct où $g(\boldsymbol{x}) = 5{x_1}^2 - {x_2}^2 - \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2$ qui est l'équation d'une hyperbole.

3. On peut écrire la forme bilinéaire $f(\boldsymbol{x})$ comme suit :

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} x_j a_{ji} x_i.$$

En prenant la dérivée par rapport à x_k, tous les termes de la somme qui ne dépendent pas de x_k vont disparaître. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}[f'(\boldsymbol{x})]_k = \frac{\partial}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i\neq k} x_k a_{ki} x_i + \sum_{j\neq k} x_j a_{jk} x_k + a_{kk} x_k^2\right) \\ = \sum_{i\neq k} a_{ki} x_i + \sum_{j\neq k} a_{jk} x_j + 2a_{kk}x_k \\ = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j \\ = [A\boldsymbol{x}]_k + [A^T\boldsymbol{x}]_k.\end{aligned}$$

4. Pour ce problème, il suffit de calculer Δu pour voir que l'on obtient 0 (si on ne fait pas d'erreur). Voici les fonctions données, écrites de manière plus explicite
   (a) dans $\mathbb{R}^2$,
   $$u(x_1, x_2) = \ln(\|\boldsymbol{x}\|_2) = \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$
   (b) dans $\mathbb{R}^3$,
   $$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

   À noter que ces fonctions ne sont pas définies en $\boldsymbol{x} = 0$, elles approchent l'infini près de ce point. Les solutions de $\Delta u = u'' = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont tout simplement les fonctions linéaires $u(x) = ax + b$.

5. Ce problème requiert une certaine quantité de calcul. Le plus facile est de débuter avec la partie à droite de l'équation, puis de démontrer que l'on arrive à la partie de gauche. En utilisant la dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{y}{r}\end{aligned}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

Pour les dérivées en θ, toujours en utilisant la dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta \\ &= -y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial y} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

Alors, avec tout les termes qui heureusement s'annulent, maintenant on voit bien que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

6. La matrice jacobienne de f est :

$$\begin{bmatrix} a\mathrm{e}^{ax}\sin(y) & \mathrm{e}^{ax}\cos(y) \\ b\mathrm{e}^{bx}\cos(y) & -\mathrm{e}^{bx}\sin(y) \end{bmatrix}$$

Le déterminant est $-\big(a\sin^2(y)+b\cos^2(y)\big)\mathrm{e}^{(a+b)x}$ qui est donc toujours strictement négatif.