UNIVERSITE DE GENEVE | Section de mathématiques

Faculté des sciences

Mathématiques pour Informaticiens – Série 6
SOLUTIONS

1. **Rappel:** $O(g(x,y))$ représente une fonction qui vérifie

$$\limsup_{(x,y)\to 0} \left| \frac{O(g(x,y))}{g(x,y)} \right| < +\infty.$$

C'est une notation pratique poour calculer rapidement et rigoureusement les développements limités.

D'abord, autour de $(0,0)$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + O(x^3), \\ \exp(-3x+4y) &= 1 + (4y-3x) + O(x^2) + O(y^2). \end{aligned}$$

On multiplie les deux développements et on obtient

$$f(x,y) = x + 4xy - 3x^2 + O(|x|^3) + O(|y|^3).$$

Autour d'un point (u,v) quelconque, c'est plus compliqué:

$$\begin{aligned} \sin(u+x) &= \sin(u) + \cos(u)x - \frac{\sin(u)}{2}x^2 + O(x^3), \\ \exp(-3(u+x)+4(v+y)) &= \exp(-3u+4v)(1-3x+4y+\frac{1}{2}(-3x+4y)^2) + \ldots \\ &\quad \ldots + O(|x|^3) + O(|y|^3). \end{aligned}$$

On multiplie les deux développements sans calculer explicitement les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 et on regroupe les termes de même ordre. Cela donne

$$\begin{aligned} f(u+x,v+y) = \exp(-3u+4v)(\sin(u)+(\cos(u)-3\sin(u))x+4\sin(u)y+\ldots \\ \ldots + (4\sin(u)-3\cos(u))x^2 + \ldots \\ \ldots + 4(\cos(u)-3\sin(u))xy + 8\sin(u)y^2) + O(|x|^3) + O(|y|^3). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer u par $\pi/3$ et y par 1.

2. En calculant les dérivées secondes mixtes, on obtient quel que soit l'ordre de dérivation (d'abord suivant x ou d'abord suivant y):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (xy-1)\sin(y)\exp(-xy) - y\cos(y)\exp(-xy).$$

3. On pose

$$F(x,y,z) = z^2 x - 3\sin(xy) + 2\cos(zx) - 2,$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,0) &= 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,0) &= -3,\\
\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, On peut écrire $y = g(x,z)$ avec g $\mathcal{C}^\infty$. Ce n'est pas possible dans les autres cas.

4. Pour vérifier si le théoréme d'inversion locale s'applique, on calcule le déterminant de la matrice jacobienne qui doit être différent de 0.

$$\begin{aligned}
J(x,y) &= \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\sin x & \cos y \end{bmatrix}\\
&= 2(x\cos y + y\sin x)
\end{aligned}$$

En évaluant à chacun des points proposés, on obtient

$$\begin{aligned}
J(0,0) &= 0, & J(\pi,\pi/2) &= 0,\\
J(\pi/2,\pi) &= \pi, & J(\pi/2,\pi/2) &= \pi,\\
J(\pi/4,\pi/4) &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, on peut inverser localement les fonctions autour des points $(\pi,\pi/2)$, $(\pi/2,\pi/2)$ et $(\pi/4,\pi/4)$.