UNIVERSITE DE GENEVE | Section de mathématiques
Faculté des sciences | jeudi 27 avril 2006

---

**Mathématiques pour Informaticiens – Série 7**
**SOLUTIONS**

1. Calculons le déterminant de la jacobienne de la fonction $f$. Nous obtenons
$$\frac{3}{8}(x+2)y^2 - \frac{3}{4}(x+1) - \frac{1}{4}\frac{y^3}{8} + \frac{3}{16}y - \frac{1}{16}$$
Cette expression est nulle si et seulement si :
$$x = \frac{1}{12}\frac{y^3 - 24y^-6y + 26}{y^-2}.$$

2. Par la règle de la dérivation en chaîne :
$$\frac{\partial W}{\partial r} = \cos\phi\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\sin\phi\frac{\partial V}{\partial x} + \cos\phi\frac{\partial V}{\partial y}.$$
On passe au carré :
$$\left|\frac{\partial W}{\partial r}\right|^2 = \cos^2\phi\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|^2 + \sin^2\phi\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|^2 + \cos\phi\sin\phi\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|^2 = \sin^2\phi\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|^2 + \cos^2\phi\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|^2 - \cos\phi\sin\phi\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}.$$
Utilisant $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, nous obtenons en sommant l'égalité souhaitée.

3. Ce problème est une application du théorème des fonctions implicites. Ici on a
$$g_1(x, y, \varepsilon) = 1 + \varepsilon\sin(xy) - x = 0,$$
$$g_2(x, y, \varepsilon) = 2 + \varepsilon(\cos(x) - y^2) - y = 0,$$
et on cherche à démontrer qu'autour d'un voisinage 0, il existe une solution $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$ à ce système d'équations et dépendant continûment

de $\varepsilon$ avec $(x(0), y(0)) = (1, 2)$. Premièrement, on vérifie facilement que $g_1(1, 2, 0) = g_2(1, 2, 0) = 0$. Deuxièmement, en évaluant la matrice jacobienne au point concerné, on trouve

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon y \cos(xy) - 1 & \varepsilon x \cos(xy) \\ -\varepsilon \sin(x) & -2\varepsilon y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe autour d'un voisinage de 0 des fonctions $x(\varepsilon), y(\varepsilon)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$ est l'unique solution, à $\varepsilon$ fixé du système $g_1(x, y, \varepsilon) = g_2(x, y, \varepsilon) = 0$.

4. (a)
```
> contourplot(2*min(abs(x),abs(y))+3max(abs(x),abs(y),x=-1..1,y=-1..1,
```
(b)
```
> f1:=x^3/(1+2*y^2);
> f2:=ln(x+y^4);
> f3:=x+y;
> plot3D(f1,x=-1..1,y=-1..1,axes=boxed);
> plot3D(f2,x=-1..1,y=-1..1,axes=boxed);
> plot3D(f2,x=-1..1,y=-1..1,axes=boxed);
```
(c)
```
> with linalg;
> A:=matrix(3,3,[2,3,0,-2,1,0,0,1]);
> evalf(Eigenvals(A,vectors));
> print(vectors);
```
(d)
```
> J=:Jacobian([exp(a*x)*sin(y),exp(b*x)*cos(y)],[x,y]);
> Determinant(J);
```
(e)
```
> p:=proc()
> local i,A;
> i:=1;
> while i<=10 do
>   A:=randmatrix(2,2)
>   if(MatrixNorm(A,2)>MatrixNorm(A,1) then
>     print(A);
>     i:=i+1;
>   fi
> od
```
(f)
```
> f:=sin(x)*exp(-3*x+4*y);
> dxy:=diff(diff(f,x),y);
> dyx:=diff(diff(f,y),x);
```