UNIVERSITÉ DE GENEVE
Faculté des sciences

Section de mathématiques
jeudi 9 juin 2006

Mathématiques pour Informaticiens – Série 11

1. (a) Une version plus sophistiquée que celle demandée :

```
function T = tableausimplexe(A,b,c,B,R)
% TABLEAUSIMPLEXE renvoie le tableau du simplexe en optimisation.
%   T=tableausimplexe(A,b,c,B,R) renvoie le tableau du simplexe
%   du problème Az=b, z>=0, c'*z--> max, pour les bases B et R.
%   où length(B)=size(A,1). Si A restreint aux colonnes indiquées
%   par B n'est pas inversible, TABLEAUSIMPLEXE renvoie erreur.
%
%   T=tableausimplexe(A,b,c,B) équivaut à T=tableausimplexe(A,b,c,B,R)
%   où R contient l'ensemble 1:size(A,2) privé de B ordonné dans l'ordre
%    croissant
%
%   T=tableausimplexe(A,b,c) équivaut à T=tableausimplexe(A,b,c,B,R)
%    où B=[1:size(A,1)]' et R=[size(A,1)+1:size(A,2)]'

m=size(A,1);
n=size(A,2);

if nargin <3
  error('pas assez d arguments')
end
if nargin <4
  B=[1:m]';
end
if nargin <5
  %On déduit le R à partir du B;
  R=[];
  for i=1:n
    if length(find(B==i))>0
      R=[R i];
    end
  end
end
if m~=length(B)
```

```
  error('B doit contenir size(A,1) indices');
end
if length(R)~=n-m
  error('R doit contenir n-m indices');
end

T(1:m,:)=A(:,B)\[A(:,R) b];
T(m+1,:)= -c(B)'*T(1:m,:) + [c(R)' 0];
```

(b) Une version plus complète que celle demandée où il est seulement nécessaire que le dernier carré soit inversible :

```
function [B,R] = baseadmissible(A,b)
% BASADMISSIBLE renvoie une base admissible pour le simplexe
%  [B,R] = baseadmissible(A,b) renvoie une base admissible
%   B au problème d'optimisation Az=b, z>=0.
%   B est un vecteur de taille size(A,1) contenant des
%  indices distincts. L'ensemble des indices compléments R
%   est aussi renvoyé. Il est impératif que
%   A(:,size(A,2)-size(A,1)+1:) soit inversible.

  m=size(A,1);
  n=size(A,2);

  if length(b)~=m
    error('b et A incompatibles');
  end
  if det(A(:,n-m+1:n))==0
    error('Dernier carre de A non inversible');
  end

 x=A(:,n-m+1:n)\b;%x=b si le dernier carré est l'identite

  L=find(x<0);
  for i=1:length(L)
    A=[A -A(:,n-m+L(i))];
  end

  Bd=find(x>0)+n-m;%les yi sans zi correspondants
  Bd=[Bd; n+1:n+length(L)];%tous les zi

  Rd=[1:n-m]';%tous les xi
```

```
  Rd=[Rd; L+n-m];%tous les yi qui ont un zi

  c=-[zeros(n,1);ones(length(L),1)];

  T=tableausimplexe(A,b,c,Bd,Rd);
  [T,B,R]=simplexe(T,Bd,Rd);
if T(size(T,1),size(T,2)) ~=0
  error('Aucune base admissible');
end
```

(c)
```
> A=[-1 -1 1 0 0; -1 2 0 1 0; 2 -1 0 0 1];
> b=[-1; 1; 1];
> baseadmissible(A,b);
  ans =
    4
    1
    2
```

La base admissible renvoyée est donc (y_1, x_1, x_2). On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une base admissible en faisant un dessin.

2. On considère le cône tronqué de révolution

$$C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2 r^2, 0 \leq z \leq a\}.$$

Le r est trompeur car il n'a pas de dimension, il représente le rayon du cercle à la hauteur 1 et non à la hauteur a. On a donc un cône de hauteur a et de rayon de base ra ! Faisons le calcul

$$\mathcal{V}(C) = \pi \int_0^a z^2 r^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi a^3 r^2}{3}.$$

Cela n'est pas la formule usuelle car ce n'est pas le même cône qu'usuellement dans les formulaires.

3. (a)

$$\pi \int_0^1 y \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

(b)

$$\pi \int_{-1}^1 (1 - x^4) \mathrm{d}y = 2\pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}.$$

4. > `with(student)`

> `In:=Int(sin(x)^n,x=0..Pi/2);`

$$In := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x$$

> `In1:=simplify(intparts(In,sin(x)^(n-1)));`

$$In1 := (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 \mathrm{d}x$$

> `In2:=powsubs(cos(x)^2=1-sin(x)^2,In1);`

$$In2 := (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n-2}(1-\sin(x)^2) \mathrm{d}x$$

> `In3:=collect(expand(In2),Int);`

$$In3 := (-n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)^n}{\sin(x)^2} \mathrm{d}x$$

> `collect(expand(In-In3=0),Int);`

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x + (-n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)^n}{\sin(x)^2} \mathrm{d}x$$