UNIVERSITÉ DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — jeudi 16 juin 2006

Mathématiques pour Informaticiens – Série 12

1. *15 points dont a) 1 pt, b) 3pts, c) 2pts, d) 1pt, e) 4pts, f 2pts, g) 2pts*
   Considérons la fonction 2π-périodique définie par

   $$f(x) = x, \quad \text{pour } x \in [-\pi, \pi).$$

   (a) Tracer cette fonction sur l'intervalle $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

   (b) Calculer la série de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ de cette fonction.

   (c) Écrire cette série sous la forme réelle

   $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

   (d) Le calcul précédent vous a permis de constater que $a_k = 0$ pour tout k. Comment pouvait-on le voir a priori sans calculer explicitement les coefficients ?

   (e) A-t-on dans ce cas l'égalité $f(x) = \sum_{k=\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Si ce n'est pas le cas, vers quel fonction, la série de Fourier converge-t-elle ponctuellement ?

   (f) Utiliser l'identité de Parceval afin de démontrer l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (g) En utilisant Maple ou Matlab, tracer sur le même graphe la fonction $f(x)$ ainsi que les fonctions obtenus en tronquant la série de Fourier à divers stades : 1, 2, 4 ou 8 termes dans la somme.

2. *15 points dont a) 1 pt, b) 3pts, c) 2pts, d) 1pt, e) 4pts, f 2pts, g) 2pts*
   Considérons la fonction 2π-périodique définie par

   $$f(x) = -x^2, \quad \text{pour } x \in [-\pi, \pi).$$

   (a) Tracer cette fonction sur l'intervalle $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

   (b) Calculer la série de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ de cette fonction.

   (c) Écrire cette série sous la forme réelle

   $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

(d) Le calcul précédent vous a permis de constater que $b_k = 0$ pour tout k. Comment pouvait-on le voir a priori sans calculer explicitement les coefficients ?

(e) A-t-on dans ce cas l'égalité $f(x) = \sum_{k=\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Si ce n'est pas le cas, vers quel fonction, la série de Fourier converge-t-elle ponctuellement ?

(f) Utiliser l'identité de Parceval afin de démontrer l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

(g) En utilisant Maple ou Matlab, tracer sur le même graphe la fonction $f(x)$ ainsi que les fonctions obtenus en tronquant la série de Fourier à divers stades : 1, 2, 4 ou 8 termes dans la somme.

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

- Les exercices. Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.

Assistant :	Kévin Santugini
Adresse électronique :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`