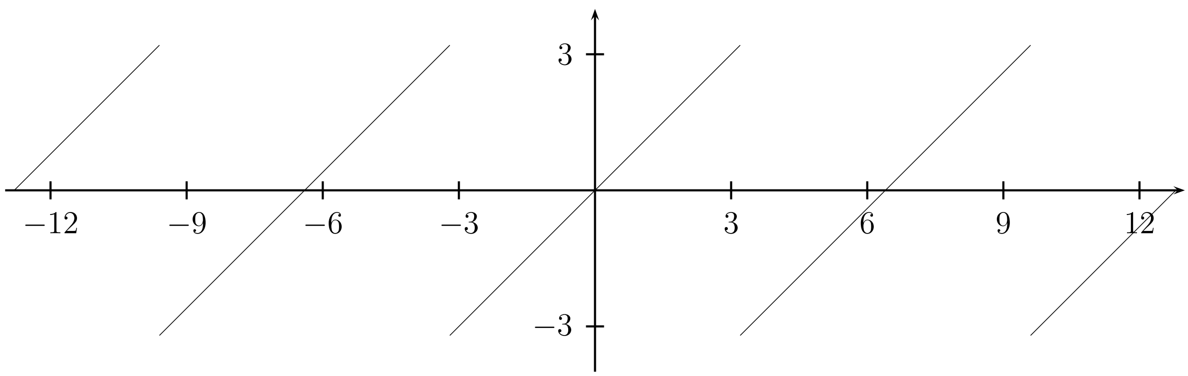
UNIVERSITÉ DE GENEVE
Faculté des sciences

Section de mathématiques
jeudi 16 juin 2006

Mathématiques pour Informaticiens – Série 12
SOLUTIONS



1. (a)
   (b) On a $c_0 = 0$, si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2i\pi k} [x\mathrm{e}^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= (-1)^k \frac{i}{k}. \end{aligned}$$

   (c) $a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = 0$, $b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$. Donc la série de Fourier est :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k} \sin(kx).$$

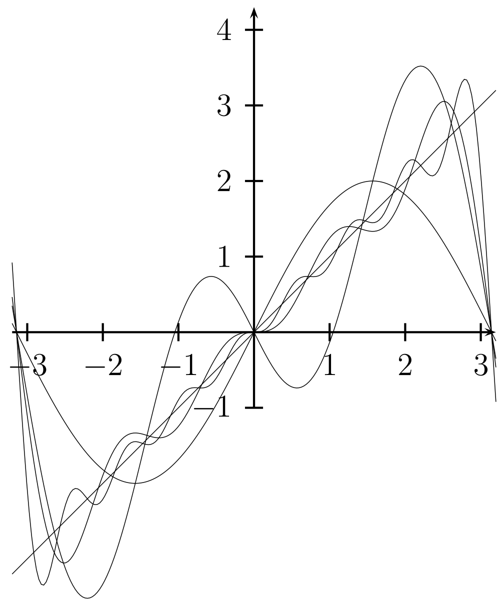
   (d) La fonction est impaire donc tous les coefficients a_k sont nuls.

(e) La fonction f est continue par morceau. Le théorème sur le noyau de Dirichlet nous dit que la série de Fourier converge ponctuellement vers $f(x)$ là où f est continue et vers la moyenne $\big(f(x^+) + f(x^-)\big)/2$ là où f est discontinue. Donc ponctuellement :

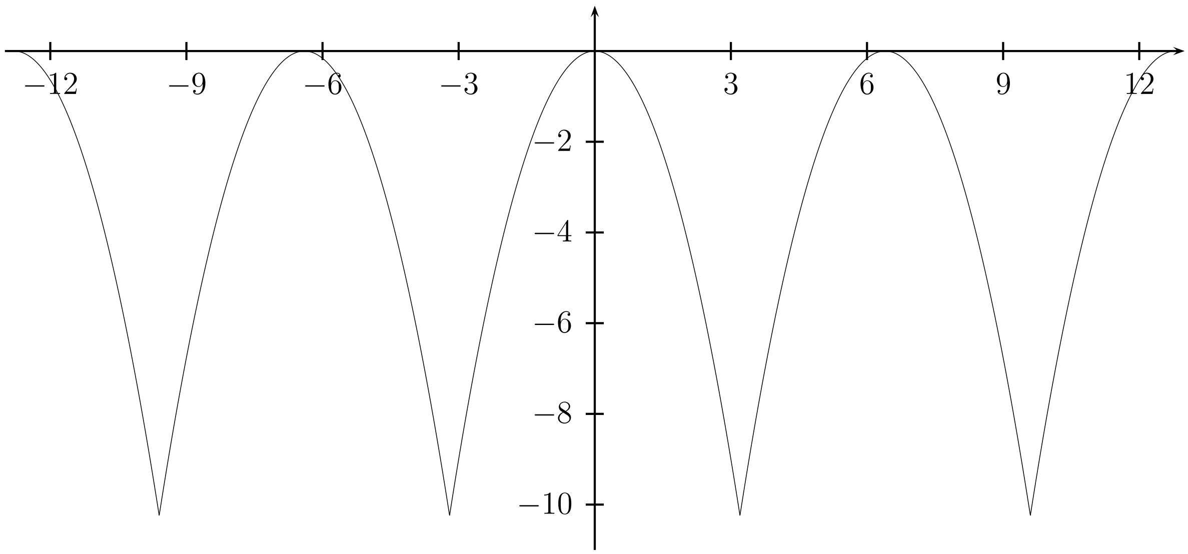
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx} = \begin{cases} x & \text{sur } (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{en } x = -\pi, \pi. \end{cases}$$

(f) Utilisons l'identité de Parseval :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$



(g)



2. (a)

   (b) On a $c_0 = -\frac{\pi^2}{3}$. Si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2i\pi k}[x^2\mathrm{e}^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{ik\pi}\int_{-\pi} x\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{k^2\pi}[x\mathrm{e}^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{k+1}\frac{2}{k^2}. \end{aligned}$$

   (c) $a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = \frac{4}{k^2}$, $b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = 0$. Donc la série de Fourier est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} + \frac{4}{k^2}\cos(kx).$$

   (d) La fonction est paire donc tous les coefficients b_k sont nuls.

   (e) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème sur le noyau de Dirichlet nous dit que la série de Fourier converge ponctuellement vers $f(x)$ là où f est continue Donc ponctuellement la série de Fourier converge toujours vers f. La convergence est normale donc uniforme.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx} = -x^2 \quad \text{sur } [-\pi, \pi],$$

(f) Utilisons l'identité de Parseval

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} &= \frac{1}{8}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2\Big) - \frac{\pi^4}{72} \\
&= \frac{1}{16\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x - \frac{\pi^4}{72} \\
&= \frac{\pi^4}{40} - \frac{\pi^4}{72} \\
&= \frac{\pi^4}{90}.
\end{aligned}$$

(g)