UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — jeudi 15 mars 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Corrigé Série 1

1. $x - y = (-2, 1, -3)$ donc

$$\|x-y\|_1 = 6, \qquad \|x-y\|_2 = \sqrt{14}, \qquad \|x-y\|_{+\infty} = 3.$$

2. (a) $\|\lambda x\| = \lambda^2\|x\| \neq \lambda\|x\|$ si $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0, 1, -1$. Ce n'est pas une norme.

   (b) $\|(1,1)\| = 0$ donc ce n'est pas une norme.

   (c) $\|(0, x_2)\| = 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$ donc ce n'est pas une norme.

   (d) C'est une norme. En effet, $(x_1, x_2) \mapsto \max(x_1, x_2)$ est la norme ℓ^∞ de $\mathbb{R}^2$ De plus $(x_1, x_2) \mapsto |x_1|$ est une semi-norme *i.e.* a toutes les propriétés d'une norme excepté que $|x_1| = 0$ n'implique pas $x = 0$. La somme d'une norme et d'une semi-norme est toujours une norme.

3. Nous avons

$$\min(|x_1|, |x_2|) + 2\max(|x_1|, |x_2|) = (|x_1| + |x_2|) + \max(|x_1|, |x_2|).$$

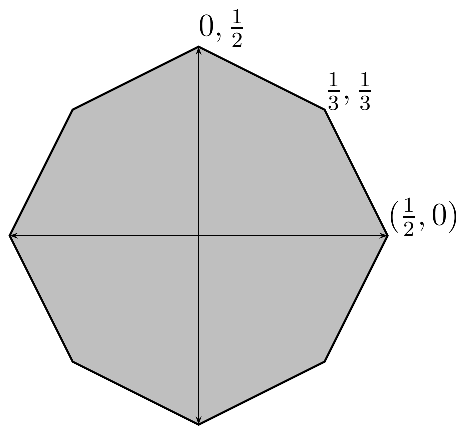
C'est la somme de deux normes (la norme ℓ^∞ et la norme ℓ^1). Donc, c'est une norme.

Pour dessiner le disque unité, il suffit de remarquer que $\|(x_1, x_2)\| = \|(x_1, -x_2)\| = \|(-x_1, x_2)\| = \|(-x_1, -x_2)\|$. Il suffit donc dessiner le disque unité dans un quadrant. Supposons x_1 et x_2 positifs. Il y a deux cas à considérer

– $x_1 \leq x_2$, dans ce cas, l'équation est $x_1 + 2x_2 \leq 1$.

– $x_2 \leq x_1$, l'équation est $2x_1 + x_2 \leq 1$.

Par conséquent, le disque unité pour cette norme est l'intérieur (au sens géométrique pas topologique) du polygône de sommets $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $(0, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.



On a

$$\|x\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} \leq \sqrt{2} \max(x_1, x_2) \leq \sqrt{2}\|x\|.$$

donc $C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ convient.
Pour calculer C_2 :

$$\|x\| \leq 2(|x_1| + |x_2|) \leq 2\sqrt{2}\|x\|_2,$$

par Cauchy-Schwarz donc $C_2 = 2\sqrt{2}$ convient.

4. Nous avons

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|) = \max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty.$$

Comme $n^{\frac{1}{p}}$ converge vers 1, on a par le théorème des encadrements ou des gendarmes que

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

5. $x = x - y + y$ donc $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ et $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. On inverse les rôles de x et de y. On obtient : $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. D'où $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq \|x - y\|$.
6. A fermé, B ouvert, C_1 ouvert borné, C_2 ouvert borné, D ni ouvert ni borné ni fermé, E borné, F fermé.