UNIVERSITE DE GENEVE
Faculté des sciences

Section de mathématiques
jeudi 23 mars 2006

Mathématiques pour Informaticiens –Série 2
SOLUTIONS

1. Démontrons que la suite est bornée :

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_2^2 &= \left[(-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]^2 + \left[(-1)^{[n/5]}\right]^2 \\
&= 2(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) + \frac{1}{n} + 1 \\
&\leq 5.
\end{aligned}$$

   Donc, $\|x_n\|_2 \leq \sqrt{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une sous-suite qui converge. La suite $(x_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(1, 1)$.

2. Dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné. Aucun des ensemble de la série précedente n'étant à la fois fermé et borné, aucun d'entre eux n'est compact.

3. f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier,

   f_2 est continue sur l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 = \pm\sqrt[4]{1/2}\}$,

   f_3 est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier car $f_3(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ partout.

4. Dans ce corrigé, nous allons aussi donner les conditions d'égalité. Ce n'était pas demandé dans l'exercice mais il est bon de les connaître. On ne traite pas les cas $p = 1$ ou $p = +\infty$ car il peuvent être traités à part (sauf pour le (b) où c'est explicitement demandé).

(a) Considérons la fonction $\ln : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$. Elle est strictement concave, en effet pour tout $x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Il en résulte, par définition d'une fonction concave, que pour tout $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$ et $0 < t < 1$

$$\ln((1-t)x + ty) > (1-t)\ln(x) + t\ln(y).$$

Il y a évidemment égalité si $t = 0$, $t = 1$, ou $x = y$.
Cherchons maintenant à démontrer

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{Concave}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, nous avons (Concave) avec égalité uniquement si x et y sont nuls. Nous pouvons maintenant supposer x et y strictement positifs. Dans ce cas, nous avons

$$\ln(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln(y^q) \geq \ln(x) + \ln(y) \geq \ln(xy),$$

par la concavité du logarithme. L'égalité n'est possible que si $x^p = y^q$, car $\frac{1}{p}$ est toujours différent de 0. On passe à l'exponentielle et on obtient l'inégalité voulue (Concave).
Pour démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{Holder}$$

on suppose que $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q \neq 0$. Si ce n'est pas le cas Hölder est vérifiée et il y a égalité. On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} &\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \frac{{x_i}^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^p\right)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q} \frac{{y_i}^q}{\left(\sum_{j=1}^{n} {y_j}^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Il n'y a égalité que s'il y a égalité dans chaque utilisation de (Concave), soit uniquement si $\frac{{x_i}^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^p\right)} = \frac{{y_i}^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} {y_j}^q\right)}$ pour tout i. On en déduit qu'il n'y a égalité dans Hölder que s'il existe $\lambda > 0$ tel que ${x_i}^p = \lambda {y_i}^q$ pour tout i ou si $x_i = y_i = 0$ pour tout i.

(b) Le cas $p = 1$ est évident. Et il n'y a égalité que si $u_i v_i \geq 0$ pour tout i. Supposons maintenant $p > 1$. Nous remarquons que $(p-1)q = p$. Nous supposons aussi que le $2n$-uplet $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ n'est pas nul. Si ce n'est pas le cas, Minkowski est vérifiée avec égalité. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(|u_i| + |v_i|)^p &= \sum_{i=1}^{n}|u_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|v_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} \\ &\leq \left((\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}}\right)((|u_i| + |v_i|)^p)^{\frac{1q}{\cdot}}\end{aligned}$$

Il n'y a égalité que s'il existe $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $|u_i| = \lambda(|u_i| + |v_i|)$ et $|v_i| = \nu(|u_i| + |v_i|)$ pour tout i. Nous pouvons alors diviser par $(\sum_{i=1}^{n}(|u_i| + |v_i|)^p)^{\frac{1}{q}}$ et on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|u_i| + |v_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

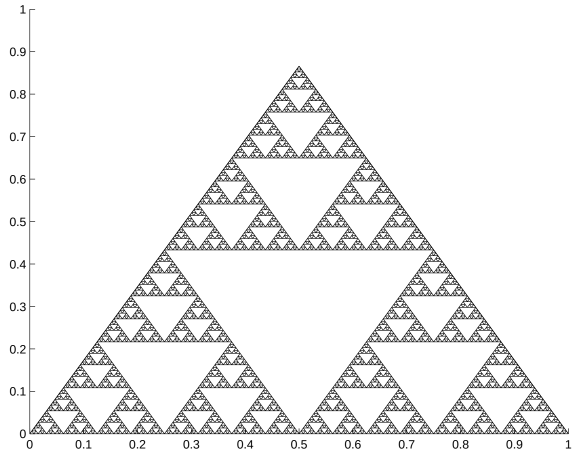
Combinée avec $|u_i + v_i| \leq |u_i| + |v_i|$, nous obtenons l'inégalité de Minkowski demandé. Il ne peut y avoir égalité que si u_i et v_i sont toujours de même signe. Il n'y a donc égalité dans Minkowski que si

– Soit il existe $\lambda > 0$ tel que $u_i = \lambda v_i$ pour tout i.
– Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n} = 0$ soit $(v_i)_{1 \leq i \leq n} = 0$.

(c) L'inégalité triangulaire est donnée par l'inégalité de Minkowski pour p réel plus grand que 1. Les autres propriétés à vérifier sont évidentes. Pour $p = +\infty$, l'inégalité triangulaire est triviale à démontrer.

5. Voici les résultats obtenus avec des programmes `MATLAB`

   A. Méthode récursive (6 niveaux de récursion)



B. Méthode probabiliste (25000 points)