UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — jeudi 29 mars 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 3
SOLUTIONS

1. *6 points*
   (a) $f_n(x,y)$ vaut 0 pour $x \geq \frac{2}{n}$ et $x \leq 0$. Or pour tout $x > 0$, il existe N entier positif tel que $x > \frac{2}{N}$. Donc, pour tout x, il existe $N \geq 0$ entier tel que $f_n(x,y) = 0$ pour tout $n \geq N$ et tout $y \in \mathbb{R}$, donc f_n admet une limite simple et pour tout x, y

   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = 0.$$

   La convergence n'est pas uniforme car $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_n(x,y) = 1$ pour tout entier positif n.

   (b) $f_n(x,y)$ tend vers 0 partout sauf aux points $((k+1/2)\pi, (j+1/2)\pi)$. La convergence ne peut être uniforme car la fonction limite n'est pas continue.

   (c) $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. La suite de fonctions tend donc uniformément vers 0.

2. Il suffit de faire le produit de chaque matrice avec sa transposée conjuguée et de vérifier si on a obtenu la matrice identité.
   – A n'est pas orthogonale,
   – B est orthogonale,
   – C est unitaire,
   – D n'est pas unitaire.

3. On dénote par $\mathbf{S}$ la matrice qui a pour colonnes les vecteurs de la nouvelle base, c.-à-d.

   $$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_3 \end{bmatrix},$$

   et de façon similaire

   $$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{T}_2 \end{bmatrix}.$$

La représentation matricielle de l'application linéaire dans ces nouvelles base est donnée par $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Mat}(f)\mathbf{S}$. On obtient d'abord $\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ puis

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. On calcule d'abord les valeurs propres de A. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 1$. Les valeurs propres sont donc $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Les vecteurs propres associés sont $\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$ respectivement. La matrice $\mathbf{U}$ doit avoir pour première colonne un vecteur propre, et pour deuxième colonne un vecteur orthogonal au premier. Par exemple

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix} 1 & -(1+\sqrt{3}) \\ 1+\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

ou

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix} 1 & -(1-\sqrt{3}) \\ 1-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

5. On pose

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\mathbf{U}_1^*\mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La sous-matrice $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres : $(3+i\sqrt{15})/2$ et $(3-i\sqrt{15})/2$. Les vecteurs propres associés sont respectivement $\boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{2}}{8}\begin{bmatrix} -4 \\ 1-i\sqrt{15} \end{bmatrix}$ et son conjugué $\bar{\boldsymbol{v}}$. Nous pouvons alors poser $\mathbf{U}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{30}}{8} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{30}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{30}}{8} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{30}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Nous posons $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$. qui est unitaire. Il ne reste plus qu'à calculer $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$.