UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — jeudi 5 avril 2007

À rendre pour le jeudi 19 avril 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 4

1. *3 points* Considérons la matrice suivante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calculer les normes $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ et $\|\mathbf{A}\|_2$.

2. *3 points* Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on sait que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Toutefois cette inégalité n'est pas vraie pour les matrices. Trouver un matrice $\mathbf{A}$ telle que

$$\|\mathbf{A}\|_2 > \|\mathbf{A}\|_1.$$

3. *3 points* Démontrer que, pour qu'une matrice soit définie positive, il est nécessaire, mais pas suffisant, que tous les éléments de la diagonale soient strictement positifs.

4. *3 points* Considérons la matrice suivante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est définie positive de deux façons distinctes:

- en calculant les valeurs propres explicitement,
- en calculant seulement des déterminants de sous-matrices.

5. Le but de cet exercice est de démontrer l'existence de la décomposition réelle de Schur. Soit $\mathbf{A}$ une matrice à coefficients réels. Il existe une matrice réelle et orthogonale $\mathbf{U}$ telle que:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{\Lambda}_n \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{\Lambda}_j$ est soit la matrice de dimension 1 $[\lambda_j]$, soit la matrice $\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j/\nu_j \\ -\nu_j\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$ de dimension 2. Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont λ_j et $\alpha_j \pm i\beta_j$. Le réel ν_j sera donné au point b).

   (a) *3 points* Soit λ_1 une valeur propre de $\mathbf{A}$, supposer λ_1 réelle. Considérer $\boldsymbol{v}_1$ un vecteur propre associé à λ_1 et montrer que l'on peut choisir $\mathbf{U}_1$ orthogonale telle que la première colonne de $\mathbf{U}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}_1$ ait la forme souhaitée.

   (b) *6 points* Supposer $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ non réel, *i.e.* $\beta_1 \neq 0$. Soit un vecteur propre $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + i\nu_1\boldsymbol{w}_1$ avec $\|\boldsymbol{u}_1\|_2 = \|\boldsymbol{w}_1\|_2 = 1$. Montrer que l'on peut choisir $\boldsymbol{v}_1$ de façon à ce que $\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w}_1 = 0$. Compléter la base orthonormale $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_1$ et montrer que l'on peut choisir $\mathbf{U}_1$ orthogonale telle que les deux premières colonnes de $\mathbf{U}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}_1$ aient la forme souhaitée.

   (c) *4 points* Réitérer le raisonnement.

6. *10 points* En utilisant le langage de programmation de votre choix (par exemple Matlab), écrire un programme qui dessine la courbe de Peano-Hilbert. La description d'un algorithme récursif vous sera donnée durant la session d'exercices.

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens:

- Les exercices
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.