

**Mathématiques pour Informaticiens – Série 5
SOLUTIONS**

1. Nous avons :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax}\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,m} \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \right) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|\mathbf{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc, $\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,m} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)$. Choisissons un i_0 pour lequel :

$$\sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \max_{i=1,\dots,m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Il y a égalité pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_j = \pm 1$ et est de même signe que a_{i_0j} . Donc, $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)$.

Pour la norme $\|\cdot\|_2$, on procède en deux étapes. D'abord,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\|_2 &= \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1} \langle \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 \\ &= \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1} \langle \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{y} \rangle_2 \\ &= \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_2 \\ &= \|\mathbf{A}\|_2^2.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est symétrique, on peut conclure.

2. La forme bilinéaire de départ, écrite sous forme matricielle, est

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 0.$$

où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonalisons la matrice \mathbf{A} . Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X - 5$. Les valeurs propres sont 5 et -1 . Un vecteur

propre unitaire associé à 5 est $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Un vecteur propre unitaire associé à -1 est $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc en notant

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

on a

$$\mathbf{R}_{-\frac{\pi}{4}}^T \mathbf{A} \mathbf{R}_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donc la courbe $f(\mathbf{x}) = 0$ est la courbe $g(\mathbf{x}) = 0$ tourné de $\pi/4$ radians dans le sens direct où $g(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - x_2^2 - \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2$ qui est l'équation d'une hyperbole.

3. On peut écrire la forme bilinéaire $f(\mathbf{x})$ comme suit :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n x_j a_{ji} x_i.$$

En prenant la dérivée par rapport à x_k , tous les termes de la somme qui ne dépendent pas de x_k vont disparaître. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} [f'(\mathbf{x})]_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i \neq k} x_k a_{ki} x_i + \sum_{j \neq k} x_j a_{jk} x_k + a_{kk} x_k^2 \right) \\ &= \sum_{i \neq k} a_{ki} x_i + \sum_{j \neq k} a_{jk} x_j + 2a_{kk} x_k \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + \sum_{j=1}^n a_{jk} x_j \\ &= [\mathbf{A} \mathbf{x}]_k + [\mathbf{A}^T \mathbf{x}]_k. \end{aligned}$$

4. Pour ce problème, il suffit de calculer Δu pour voir que l'on obtient 0 (si on ne fait pas d'erreur). Voici les fonctions données, écrites de manière plus explicite

(a) dans \mathbb{R}^2 ,

$$u(x_1, x_2) = \ln(\|\mathbf{x}\|_2) = \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

(b) dans \mathbb{R}^3 ,

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

À noter que ces fonctions ne sont pas définies en $\mathbf{x} = 0$, elles approchent l'infini près de ce point. Les solutions de $\Delta u = u'' = 0$ sur \mathbb{R} sont tout simplement les fonctions linéaires $u(x) = ax + b$.

5. Ce problème requiert une certaine quantité de calcul. Le plus facile est de débiter avec la partie à droite de l'équation, puis de démontrer que l'on arrive à la partie de gauche. En utilisant la dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{y}{r} \end{aligned}$$

... ..

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Pour les dérivées en θ , toujours en utilisant la dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta \\ &= -y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

... ..

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Alors, avec tout les termes qui heureusement s'annulent, maintenant on voit bien que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

6. La matrice jacobienne de f est :

$$\begin{bmatrix} ae^{ax} \cos(y) & -e^{ax} \sin(y) \\ be^{bx} \sin(y) & e^{bx} \cos(y) \end{bmatrix}$$

Le déterminant est $(a \cos^2(y) + b \sin^2(y))e^{(a+b)x}$ qui est toujours strictement positif.