UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques
Faculté des sciences — jeudi 3 mai 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 7

1. *5 points Soit $u(x,y)$ une fonction différentiable, et soit*

$$w(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, montrer l'égalité

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Par la règle de la dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial y}.$$

On passe au carré :

$$\left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2 = \cos^2\varphi \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \sin^2\varphi \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 + \cos\varphi\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2 = \sin^2\varphi \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \cos^2\varphi \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 - \cos\varphi\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Utilisant $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, nous obtenons en sommant l'égalité souhaitée.

2. *5 points Soit $u(x,y)$ une fonction deux fois différentiable, et soit*

$$w(r,\varphi) = u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi).$$

En utilisant la règle de la dérivation en chaîne, démontrer l'égalité suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

Ce problème requiert une certaine quantité de calcul. Le plus facile est de débuter avec la partie à droite de l'équation, puis de démontrer que l'on arrive à la partie de gauche. En utilisant la dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{y}{r}\end{aligned}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial y}+2\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

Pour les dérivées en φ, toujours en utilisant la dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi \\ &= -y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial y}-2\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

Alors, avec tout les termes qui heureusement s'annulent, maintenant on voit bien que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3. *6 points Soit $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$. Estimer la norme infini de l'erreur commise sur $B_R(x_0, y_0)$ par le developpement de Taylor*
   - *d'ordre 1 quand $(x_0, y_0) = (0.1, 0)$.*
   - *d'ordre 1 quand $(x_0, y_0) = (1.5, 0)$.*
   - *d'ordre 2 quand $(x_0, y_0) = (0.1, 0)$.*
   - *d'ordre 2 quand $(x_0, y_0) = (1.5, 0)$.*

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

- Les exercices. Les séries d'exercices rendues en retard seront comptés comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.

Assistant :	Kévin Santugini
Adresse électronique :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`