UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — jeudi 24 mai 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 9
SOLUTIONS

1. (a) En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, nous obtenons la paramétrisation suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (z,\theta) &\mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}|z|\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|z|\sin\theta \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous calculons le plan tangent au point $\boldsymbol{x}_0 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)^t$. Ce qui correspond à $z = -2$ et à $\theta = \pi/6$. On pose $\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\boldsymbol{v}_2 = \frac{\partial f}{\partial z}$.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On peut alors écrire le plan tangent à l'aide de ces deux vecteurs

$$T = \{\boldsymbol{x}_0 + a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \mid \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(b) En utilisant une approximation linéaire de Taylor autour du point $\boldsymbol{x}_0$, on trouve que l'équation du plan tangent est :

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (z+2) = 0.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \quad \text{où } \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\boldsymbol{n}$ est un vecteur orthogonal au plan tangent.

Pour démontrer que ces deux formulations représentent le même plan tangent, il suffit de constater que $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0$ et que $\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0$.

2. Deux vecteurs tangents au tore sont obtenus par

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \beta}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1+3\sqrt{2}) \\ \frac{1}{4}(1+3\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc, l'espace (le plan) tangent peut être écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+3\sqrt{2}) \\ \frac{1}{4}(1+3\sqrt{2}) \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1+3\sqrt{2}) \\ \frac{1}{4}(1+3\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut écrire le tore sous la forme non-paramétrique

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2 + z^2 = \rho^2 \right\}.$$

3. Caclulons $f'(x) = x(4x^2 - 15x + 1)$. Les points critiques de f sont donc sur $\mathbb{R}$, 0, $\frac{15-\sqrt{209}}{8}$, $\frac{15+\sqrt{209}}{8}$. Le dernier point est en dehors de l'intervalle $[-1,2]$. Sur $[-1,2]$, on a pour minima locaux $x_1 = 0$ et $x_3 = 2$, et pour maxima locaux $x_0 = -1$ et $x_2 = \frac{15-\sqrt{209}}{8}$. En calculant $f(x_i)$ pour $i = 0,1,2,3$, on obtient les maximum et minimum globaux sur $[-1,2]$. Le maximum global est obtenu en -1, $f(-1) = 4.5$. Le minimum global est obtenu en 2, $f(2) = -24$.

4. Calculons les dérivées partielles suivant x et y de f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{3}{8}y^2 - 6x \end{aligned}$$

Les seuls points où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément sont $(0,0)$ et $(-4,8)$. Ce sont donc les deux seuls points critiques. Il reste à calculer les valeurs propres de la Hessienne de f, qui vaut :

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & -\frac{3}{4}y \end{bmatrix}.$$

Pour le point $(0, 0)$, les valeurs propres sont -6 et 6, donc il s'agit d'un point selle. Pour le point $(-4, 8)$, la trace vaut -30 et le déterminant 108, donc le polynôme caractéristique vaut $X^2 + 30X + 108$. Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = -30 < 0$ et que $\lambda_1\lambda_2 = 108 > 0$, on en conclut que les deux valeurs propres sont négatives. Par conséquent, f atteint en $(-4, 8)$ un maximum local.