UNIVERSITÉ DE GENEVE | Section de mathématiques

Faculté des sciences | jeudi 7 juin 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 11

1. *4 points* Soit $a > 0$ et $r > 0$. On considère le cône tronqué de révolution

$$C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2 r^2, 0 \leq z \leq a\}.$$

Calculer le volume du cône C.

2. *4 points* On considère

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \mathrm{d}x.$$

En utilisant `Maple` avec `with(student)` et `intparts`, montrer que pour $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3. *8 points* **Algorithme de pente maximale** Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On cherche à minimiser la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

sur $\mathbb{R}^n$.

(a) Vérifier que si $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ est un minimum de f alors $\mathbf{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$.

(b) On cherche à construire une suite $\boldsymbol{x}_k$ qui converge vers la solution $\widetilde{\boldsymbol{x}}$. Étant donné un vecteur $\boldsymbol{x}_k$, et une direction $\boldsymbol{p}_k$, on définit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k.$$

où α_k vérifie

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{p}_k)$$

Exprimer α_k en fonction de $\boldsymbol{x}_k$, de $\boldsymbol{p}_k$ et de $\mathbf{A}$.

(c) On prend à chaque itération $\boldsymbol{p}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$. Exprimer $\boldsymbol{p}_k$ en fonction de $\boldsymbol{x}_k$ et de $\mathbf{A}$.

4. *10 points*

(a) Implémenter l'algorithme de Nelder-Mead.

```
function x=NelderMead(f,x0,tol,maxiter,r,c,g,s)
% NELDERMEAD direct minimization algorithm by Nelder Mead
%   x=NelderMead(f,x0,tol,maxiter,r,c,g,s) tries to find a minimum of
%   f, starting at x0. The remaining parameters are optional, and
%   defaults are chosen, if they are not given.
```

(b) Implémenter l'algorithme de pente maximale.

```
function [x,xk]=SteepestDescent(A,b,x0,tol,maxiter)
% STEEPESTDESCENT steepest descent minimum search
%   [x,xk]=SteepestDescent(A,b,x0,tol,maxiter) finds an
%   approximate minimum of the function x'*A*x/2-b'*x
%   at the initial guess x0. The remaining parameters are optional and
%   default values are used if they are omited. xk contains all the
%   iterates of the method.
```

(c) Tester ces deux algorithmes sur la fonction

$$f : \mathbb{R}(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2}{5} + 5x_2^2.$$

avec comme point initial $(-100, 2)$ pour l'algorithme de pente maximale et comme triangle initial $(-100, 2.2), (-100, 1.8), (-99.8, 2)$ pour l'algorithme de NelderMead. On afficher les itérations successives des deux algorithmes :

- les triangles successifs pour NelderMead.
- les points $\boldsymbol{x}_k$ successifs pour l'algorithme de pente maximale (tracer les segments entre les points $\boldsymbol{x}_k$ qui se suivent).

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

- Les exercices. Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.

Assistant :	Kévin Santugini
Adresse électronique :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`