UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — Mercredi 23 novembre 2005

À rendre au début de la séance du Mercredi 7 décembre 2005

Méthodes itératives – Série 3

Exercice 1 Montrer que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
-4 & 1 & & & 1 & & & & \\
1 & -4 & \ddots & & & 1 & & & \\
& \ddots & \ddots & 1 & & & \ddots & & \\
& & 1 & -4 & & & & 1 & \\
\hline
1 & & & & -4 & 1 & & & \ddots \\
& 1 & & & 1 & -4 & \ddots & & \\
& & \ddots & & & \ddots & \ddots & 1 & \\
& & & 1 & & & 1 & -4 & \\
\hline
& & & & \ddots & & & & \ddots
\end{array}\right]\boldsymbol{u}$$

est une approximation du Laplacien, $\triangle u = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u$.

Exercice 2 Si une matrice $\mathbf{A}$ a la propriété A, montrer que la méthode de Gauss-Seidel converge deux fois plus vite que Jacobi.
*Indication :*Utiliser le théorème $(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2$, où λ est une valeur propre de la matrice d'itération de SOR, μ une valeur propre de la matrice d'itération de Jacobi et ω le parametre de relaxation dans SOR.

Exercice 3

a) Montrer que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ de l'exercice 1 sont $\lambda_{i,j} = -\frac{4}{h^2}(\sin^2(\frac{i}{2(n_x+1)})\pi) + \sin^2(\frac{j}{2(n_y+1)})\pi))$ pour les entiers $1 \leq i \leq n_x$, $1 \leq j \leq n_y$ quand les blocs sont de taille $n_x \times n_x$ et que la matrice est de taille $n_x n_y \times n_x n_y$ (n_x représente le nombre de ligne dans le maillage et n_y le nombre de colonnes et la numérotation des noeuds du maillage s'est effectuée en colonne).

b) Calculer le paramètre optimal pour Richardson appliquée à la matrice $\mathbf{A}$.

c) Calculer le paramètre optimal pour SOR appliquée à la matrice $\mathbf{A}$.

Exercice 4 a) Implémenter Richardson et SOR avec l'en tête :

```
function [x,res]=SOR(A,b,relax,x0,tol,maxiter)
% SOR Résolution de systèmes linéaires par la méthode de surrelaxation
%   [x,res]=SOR(A,b,w,x0,tol,maxiter) résoud Ax=b par la méthode de
%   SOR avec parametre w en utilisant x0 pour choix initial.
%   L'algorithme s'arrête quand maxiter opérations ont été effectuées
%   ou que la norme 2 du résidu devient plus petite que tol. La
%   variable de sortie res est un vecteur contenant l'historique des
%    normes des résidus.

function [x,res]=Richardson(A,b,relax,x0,tol,maxiter)
% RICHARDSON Résolution de systèmes linéaires par la méthode de Richardson
%   [x,res]=Richardson(A,b,alpha,x0,tol,maxiter) résoud Ax=b par la
%   méthode de Richardson avec parametre alpha  en utilisant x0 pour
%   choix initial. L'algorithme s'arrête quand maxiter opérations ont
%   été effectuées ou que la norme 2 du résidu devient plus petite que
%   tol. La variable de sortie res est un vecteur contenant l'historique
%    des normes des résidus.
```

b) Tester SOR et Richardson sur la matrice discrétisée du Laplacien avec paramètre optimal.

c) Raffiner le maillage et comparer la vitesse de convergence avec Jacobi, Gauss-Seidel (voir série 2). On pourra représenter le logarithme du résidu en fonction du logarithme du pas de maillage.

Exercice 5 Montrer que toute matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$ peut être transformée en matrice de Hessenberg par des reflexions de Householder successives :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_n$$

où les $\mathbf{P}_i = \mathbf{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$ avec $\|\boldsymbol{w}\|_2 = 1$.

Exercice 6 Soit $\mathbf{A}$ une matrice réelle $m \times m$ inversible. Soit $\boldsymbol{b}$ un vecteur réel de $\mathbb{R}^m$. On pose pour tout $k \geq 1$: $\mathcal{K}_k = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{b}, \ldots, \mathbf{A}^k\boldsymbol{b})$. On définit alors l'algorithme d'Arnoldi par :

- $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{b}/\|\boldsymbol{b}\|$
- pour $n = 1, 2, 3, \ldots,$

  $\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{q}_n$

  pour $j = 1, \ldots, n$

  $h_{j,n} = \boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$

  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - h_{j,n}\boldsymbol{q}_j$

  $h_{n+1,n} = \|\boldsymbol{v}\|$

  $\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{v}/h_{n+1,n}$

On suppose qu'il existe $n \leq m$ tel que $h_{n+1,n} = 0$.

a) Montrer que $\mathbf{A}\boldsymbol{q_n}$ appartient à $\mathcal{K}_n$.

b) En déduire que $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_n$ pour tout entier $p \geq n$.

c) En vous inspirant du concept de polynôme minimal d'une matrice, montrer que la solution $\boldsymbol{x}$ à l'équation $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ appartient à $\mathcal{K}_n$.

Évaluation du cours Méthodes itératives :

- Les exercices.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).