UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques
Faculté des sciences

Méthodes itératives – Corrigé série 3

Corrigé exercice 1 *Sur 5 points* On considère un maillage régulier et rectangulaire à n_x lignes et n_y colonnes. Pour une fonction réelle u définie sur le domaine rectangulaire, on note par $u_{i,j}$ la valeur $u(ih, jh)$ pour $1 \leq i \leq n_x$ et $1 \leq j \leq n_y$. Si u est suffisamment régulière alors par la formule d'approximation de Taylor :

$$\begin{aligned}
u_{i+1,j} &= u_{i,j} + h(\partial_x u)_{i,j} + \frac{h^2}{2}(\partial_x^2 u)_{i,j} + \frac{h^3}{6}(\partial_x^3 u)_{i,j} + O(h^4),\\
u_{i-1,j} &= u_{i,j} - h(\partial_x u)_{i,j} + \frac{h^2}{2}(\partial_x^2 u)_{i,j} - \frac{h^3}{6}(\partial_x^3 u)_{i,j} + O(h^4),\\
u_{i,j+1} &= u_{i,j} + h(\partial_y u)_{i,j} + \frac{h^2}{2}(\partial_y^2 u)_{i,j} + \frac{h^3}{6}(\partial_y^3 u)_{i,j} + O(h^4),\\
u_{i,j-1} &= u_{i,j} - h(\partial_y u)_{i,j} + \frac{h^2}{2}(\partial_y^2 u)_{i,j} - \frac{h^3}{6}(\partial_y^3 u)_{i,j} + O(h^4),
\end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer ces inégalités puis de diviser par h^2 pour obtenir la formule aux différences finis :

$$(\triangle u)_{i,j} = (A_h u)_{i,j} + O(h^2).$$

où

$$(A_h u)_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + -4u_{i,j} \tag{1}$$

et avec les conventions $u_{i,0} = u_{i,n_y+1} = u_{0,j} = u_{n_x+1,j} = 0$. A_h est l'opérateur du Laplacien discret, c'est un opérateur linéaire et a donc une représentation matricielle lorsque on choisit de représenter le vecteur u sous forme de vecteur colonne, *i.e* par renumérotation du maillage. Si la numérotation s'effectue en colonnes, cette matrice est la matrice $\mathbf{A}$ de l'énoncé.

Corrigé exercice 2 *Sur 5 points* La matrice $\mathbf{A}$ a la propriété A donc par l'indication (SOR avec $\omega = 1$ est Gauss-Seidel) $\lambda^2 = \lambda\mu^2$ où les λ sont les valeurs propres de la matrice d'itération de Gauss-Seidel $\mathbf{B}_{GS}$ et μ celles de la matrice d'itération de Jacobi $\mathbf{B}_J$ donc $\rho(\mathbf{B}_{GS}) = \rho(\mathbf{B}_J)$.

Corrigé exercice 3 *Sur 10 points dont 8 pour le a), 1 pour le b), 1 pour le c)*

a) Il faut s'inspirer du cas continu. En effet, sur le rectangle $(O, L) \times (0, H)$, les fonctions $(x, y) \mapsto \sin(k\pi x/L)\sin(l\pi y/L)$ sont des vecteurs propres du Laplacien. Cela conduit à considérer les vecteurs $\boldsymbol{u}^{k,l} \in \mathbb{R}^{nx \times n_y}$, $1 \leq k \leq n_x$, $1 \leq l \leq n_y$, définis par

$$\boldsymbol{u}_{i,j}^{k,l} = \sin(\frac{ik\pi}{n_x+1})\sin(\frac{jl\pi}{n_y+1}).$$

Utilisons maintenant la formule aux différences finies du corrigé de l'exercice 1. On obtient, après applications des formules trigonométriques usuelles :

$$\begin{aligned}(A_h\boldsymbol{u}^{k,l})_{i,j} &= \frac{1}{h^2}\left(\sin(\frac{(i+1)k\pi}{n_x+1}) + \sin(\frac{(i-1)k\pi}{n_x+1}) - 2\sin(\frac{ik\pi}{n_x+1})\right)\sin(\frac{jl\pi}{n_y+1}) \\ &\quad + \frac{1}{h^2}\left(\sin(\frac{(j+1)l\pi}{n_y+1}) + \sin(\frac{(j-1)l\pi}{n_y+1}) - 2\sin(\frac{jl\pi}{n_y+1})\right)\sin(\frac{ik\pi}{n_x+1}) \\ &= \frac{2}{h^2}(\cos(k\pi/(n_x+1)-1) + \cos(l\pi/(n_y+1)-1))u_{i,j}^{k,l} \\ &= -\frac{4}{h^2}\big(\sin^2(\frac{k\pi}{2(n_x+1)}) + \sin^2(\frac{l\pi}{2(n_y+1)})\big)u_{i,j}^{k,l}.\end{aligned}$$

Nous avons $n_x \times n_y$ vecteurs propres formant une partie libre. Nous avons donc comptabilisé toutes les valeurs propres qui sont bien les $\lambda_{i,j}$.

b) La matrice d'itération de Richardson est donnée par $\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A}$. Si on note par $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre et $\lambda_{\min}$ la plus petite alors d'après le cours :

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

Utilisant le a), on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} + \lambda_{\max} = \frac{4}{h^2}\big(\sin^2(\frac{\pi}{2(n_x+1)}) + \sin^2(\frac{\pi}{2(n_y+1)}) \\ + \sin^2(\frac{n_x\pi}{2(n_x+1)}) + \sin^2(\frac{n_yl\pi}{2(n_y+1)})\big) = \frac{8}{h^2}.\end{aligned}$$

D'où $\alpha_{\text{opt}} = \frac{h^2}{4}$.

c) La matrice d'itération de Jacobi est

$$\mathbf{B}_J = \mathbf{I} + \frac{h^2}{4}\mathbf{A}.$$

Ses valeurs propres sont donc les $\frac{1}{2}(\cos(k\pi/(n_x+1))+\cos(l\pi/(n_y+1)))$ pour $1 \le i \le n_x$, $1 \le i \le n_x$. Donc, $\rho(\mathbf{B}_J) = \frac{1}{2}(\cos(\pi/(n_x+1)) + \cos(\pi/(n_y+1)))$. Comme la matrice du Laplacien discrétisé a la propriété A, il suffit maintenant d'appliquer la formule :

$$w_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(\mathbf{B}_J)^2}}$$

Corrigé exercice 4 *Sur 20 points dont 10 (5 pour SOR et 5 pour Richardson) pour le a) , 5 pour le b) et 5 pour le c)* Fonction Richardson :

```
function [x,res]=Richardson(A,b,alpha,x0,tol,maxiter)
% Richardson Résolution de systèmes linéaires par la méthode de Richardson
%   [x,res]=Richardson(A,b,relax,x0,tol,maxiter) résoud Ax=b par la méthode de
%   Richardson avec parametre relax  en utilisant x0 pour choix initial.
%   L'algorithme s'arrête quand maxiter opérations ont été effectué ou que
%   la norme 2 du résidu devient plus petite que tol. La variable de sortie
%   res est un vecteur contenant l'historique des normes des résidus.

if nargin <3
  error('not enough arguments');
end
if nargin < 6
  maxiter=500;
end
if nargin <5
  tol=1e-6;
end
if nargin <4
   x0=zeros(size(A,1),1);
end

x=x0;

res(1)=norm(b-A*x);

i=1;
while i<=maxiter & res(i)>tol
```

```
  x=(eye(size(A))-alpha*A)*x+alpha*b;
  res(i+1)=norm(b-A*x);
  i=i+1;
end
```

Fonction SOR :

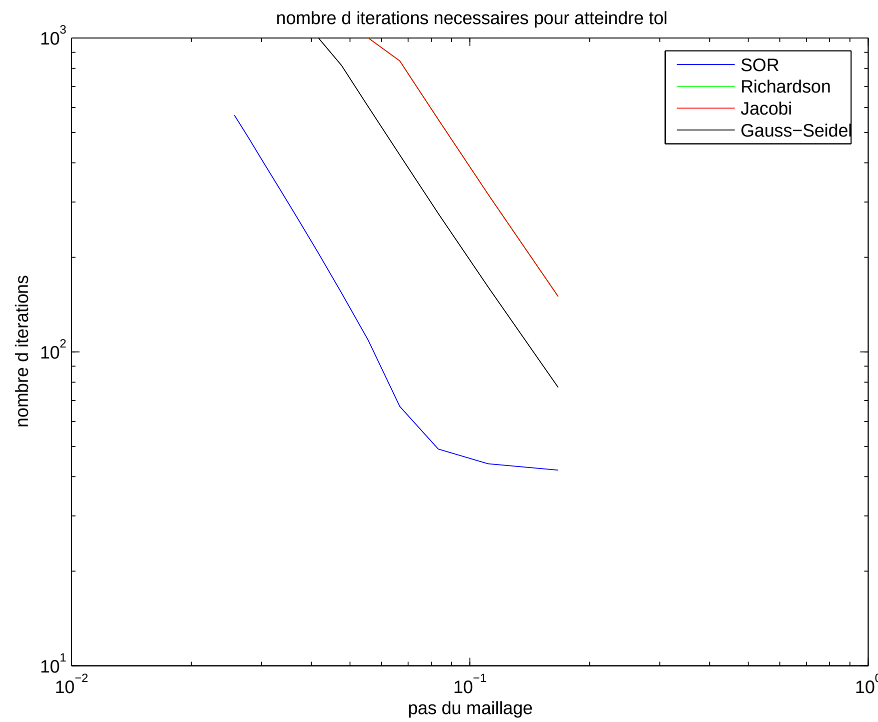
```
function [x,res]=SOR(A,b,relax,x0,tol,maxiter)
% SOR R?solution de syst?mes lin?aires par la m?thode de surrelaxation
%   [x,res]=SOR(A,b,relax,x0,tol,maxiter) r?soud Ax=b par la m?thode de
%   SOR avec parametre relax  en utilisant x0 pour choix initial. L'algorithme
%   s'arr?te quand maxiter op?rations ont ?t? effectu? ou que la norme 2 du
%   r?sidu devient plus petite que tol. La variable de sortie res est un
%    vecteur contenant l'historique des normes des r?sidus.

if nargin <3
  error('not enough arguments');
end
if nargin < 6
  maxiter=500;
end
if nargin <5
  tol=1e-6;
end
if nargin <4
   x0=zeros(size(A,1),1);
end

L=tril(A,-1);
U=triu(A,1);
D=diag(diag(A));

x=x0;

res(1)=norm(b-A*x);

i=1;
while i<=maxiter & res(i)>tol
  x=(D/relax+L)\(((1-relax)/relax*D-U)*x+b);
  res(i+1)=norm(b-A*x);
  i=i+1;
end
```

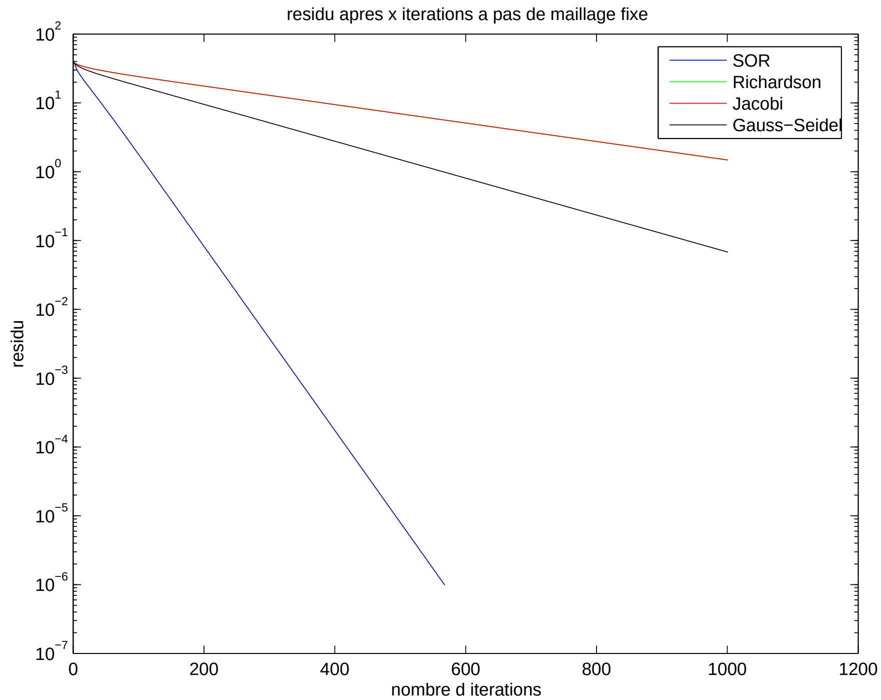
Script d'exécution :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SCRIPT serie3.m %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
nx=14;
ny=14;%Construction de la matrice du Moins Laplacien
A=delsq(numgrid('S',16));%Construction du second membre
b=ones(nx*ny,1);%Calcul des param?tres optimaux:
wRich=1/4;
rhoJ=(cos(pi/(nx+1))+cos(pi/(ny+1)))/2;
wSOR=2/(1+sqrt(1-rhoJ^2));

[x,res]=Richardson(A,b,wRich);
x
length(res)
res(length(res))


[x,res]=SOR(A,b,wSOR);
x
length(res)
res(length(res))


N=6:3:39
for k=1:length(N)
  H(k)=1/N(k);
  A=delsq(numgrid('S',N(k)+2));
  b=ones(k^2,1);
  [x,resR]=Richardson(A,b,wRich);
  IRich(k)=length(res);
  [x,resS]=SOR(A,b,wSOR);
  ISOR(k)=length(res);
  [x,resJ]=Jacobi(A,b);
  IJacobi(k)=length(res);
  [x,resG]=GaussSeidel(A,b);
  IGS(k)=length(res);
end
  figure;
  logog(H,ISOR,'b',H,IRich,'g',H,IJacobi,'r',H,IGS,'k');
```

```
Legend('SOR','Richardson','Jacobi','Gauss-Seidel');
figure
semilogy(1:length(resS),resS,'b',1:length(resR),resR,'g', ...
  1:length(resJ),resJ,'r',1:length(resG),resG,'k')
Legend('SOR','Richardson','Jacobi','Gauss-Seidel');
```

Figures obtenues :





Corrigé exercice 5 *Sur 5 points* Il suffit de construire une suite de matrice $(\mathbf{A}_k)_{0\leq k\leq n-2}$ et une suite de matrices de Householder $(\mathbf{P}_k)_{1\leq k\leq n-2}$ tels que

a) $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{A}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_k^{\mathrm{T}}$.

c) $\mathbf{P}_k = \mathbf{I} - 2\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}$ avec $\|\boldsymbol{w}_k\|_2 = 1$ et tels que les k premières composantes de $\boldsymbol{w}_k$ soient nulles.

d) $\mathbf{A}_k$ est de Hessenberg sur ces i premières colonnes, *i.e.* $(\mathbf{A}_k)_{i,j} = 0$ pour $i \geq j+1$, $i \leq k$.

En effet, dans ce cas $\mathbf{A}_{n-2}$ est de Hessenberg et $\mathbf{A}_{n-2} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ avec $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_{n-2}$. Pour construire cette suite, il suffit de procéder par récurrence. On suppose $\mathbf{A}_{k-1}$ construit. Remarquons d'abord qu'étant donné $\mathbf{P}_k$ satisfaisant 5c et telle que $(\mathbf{P_k}\mathbf{A}_{k-1})_{i,j} = 0$ pour $1 \leq i \leq k$, $i \geq i+1$. Alors $\mathbf{P}_k$ convient. En effet, la multiplication à droite par $\mathbf{P}_k^{\mathrm{T}}$ ne modifie pas les k première colonnes. Or, on peut construire un tel $\mathbf{P}_k$: voir l'algorithme de décomposition QR.

Corrigé exercice 6 *Sur 10 point dont 2 pour le a), 3 pour le b) et 5 pour le c)*Il s'agit de l'algorithme d'Arnoldi. Rappelons d'abord que pour i, $0 \leq i \leq n$, les vecteurs $(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$ forment une base orthonormale de $\mathcal{K}_i$. Nous pouvons maintenant répondre aux questions :

a) Si $h_{n+1,n} = 0$ alors $\mathbf{A}\boldsymbol{q}_n = \sum_{j=1}^{n} h_{j,n}\boldsymbol{q}_j \in \mathcal{K}_n$.

b) Démontrons d'abord que c'est le cas pour $p = n+1$: Il suffit de démontrer que $\mathbf{A}^n\boldsymbol{b}$ appartient à $\mathcal{K}^n$. Tout d'abord, par définition $\mathbf{A}^{n-1}b$ appartient à $\mathcal{K}_n$ donc peut d'écrire comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\boldsymbol{q}_i$ donc $\mathbf{A}^n\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{A}\boldsymbol{q}_i$. Pour $i < n$, $\mathbf{A}\boldsymbol{q}_i$ appartient à $\mathcal{K}_{i+1} \subset \mathcal{K}_n$. Pour $i = n$, on conclut avec l'aide du a).

Pour traiter le cas $p > n+1$, on procède par récurrence. Soit $p \geq n+1$. On suppose $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_n$. L'inclusion $\mathcal{K}_{p+1} \supset \mathcal{K}_n$ est triviale. Pour l'inclusion inverse, on remarque que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{p+1} &= \boldsymbol{b} + \mathbf{A}\mathcal{K}_p \\ &= \boldsymbol{b} + \mathbf{A}\mathcal{K}_n \\ &= \mathcal{K}_{n+1} \\ &= \mathcal{K}_n. \end{aligned}$$

c) Considérons le polynôme minimal $P = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i X^i$ de $\mathbf{A}$. Comme $\mathbf{A}$ est inversible, $\alpha_0 \neq 0$. Comme par définition $P(\mathbf{A}) = 0$:

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\sum_{i=1}^{m} \frac{-\alpha_i}{\alpha_0}\mathbf{A}^{i-1}\boldsymbol{b},$$

Donc, $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ appartient à $\mathcal{K}_m$où m est le degré du polynôme minimale de $\mathbf{A}$. Comme $\mathcal{K}_m \subset \mathcal{K}_n$ pour tout m, on a $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \in \mathcal{K}_n$.