UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques
Faculté des sciences — Mercredi 7 décembre 2005
À rendre au début de la séance du Mercredi 21 décembre 2005

Méthodes itératives – Série 4

Exercice 1 a) Établir un algorithme pour calculer la décomposition $\mathbf{QR}$ d'une matrice de Hessenberg $\mathbf{H}$ de taille k à l'aide de rotation de Givens en $O(k^2)$ opérations.

b) On suppose que l'on connaît déjà la décomposition $\mathbf{QR}$ de la matrice constituée des $k-1$ premières colonnes de $\mathbf{H}$. Comment s'en servir pour calculer la décomposition $\mathbf{QR}$ en $O(k)$ opérations.

Exercice 2 GMRES recherche l'approximation $\boldsymbol{x}_n$ de la solution à $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dans $\mathcal{K}_n(\mathbf{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\boldsymbol{b})$. On suppose que l'on connait une bonne approximation initiale $\boldsymbol{x}_0$ de la solution. Comment modifier le problème $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pour incorporer cette information dans $\mathcal{K}_n$?

Exercice 3 On souhaite appliquer l'algorithme GMRES à la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

En combien d'itérations au maximum (quel que soit le choix de $\boldsymbol{b}$) l'algorithme GMRES va-t-il converger ?

Exercice 4 a) Démontrer que les polynômes de Chebyshev réels définis par $C_k(t) = \cos(k \arccos t)$ sur $[-1, 1]$ satisfont la relation de récurrence

$$\begin{aligned} C_0(t) &= 0, \\ C_1(t) &= t, \\ C_{k+1}(t) &= 2tC_k(t) - C_{k-1}(t). \end{aligned}$$

b) Soit α, β deux réels, $0 < \alpha < \beta$. Montrer que

$$p(t) = \frac{C_k(1 + 2\frac{t-\beta}{\beta-\alpha})}{C_k(1 - 2\frac{\beta}{\beta-\alpha})}$$

est l'unique polynôme de degré k vérifiant $p(0) = 1$ de norme $L^\infty([\alpha, \beta])$ minimale.
Indication : Montrer que si un polynôme q de degré k contredit le résultat, alors $p - q$ a au moins $k + 1$ zéros.
Remarque : Il est intéressant de démontrer sans connaissance a priori des polynômes de Chebyshev que le polynôme réalisant le minimum équioscille.

Exercice 5 a) Implémenter Arnoldi :

```
function [Q,H]=Arnoldi(A,b,k)
% Arnoldi: Calcule une base orthogonale d'un espace de Krylov
%   [Q,H]=Arnoldi(A,b,k)
%  Calcul d'une base orthogonale de l'espace de Krylov engendré
%  par (b,Ab,...,A^(k-1)b) par la méthode de Arnoldi. Renvoie
%  cette base stockée en vecteurs colonnes dans Q et la matrice
%  Hessenberg des coefficients d'orthogonalisation dans H.
```

et Lanczos :

```
function [Q,T]=Lanczos(A,b,k)
% Lanzcos: Calcule une base orthogonale d'un espace de Krylov
%   [Q,T]=Lanczos(A,b,k)
%  Calcul d'une base orthogonale de l'espace de Krylov engendré
%  par (b,Ab,...,A^(k-1)b) par la méthode de Lanczos. A doit etre
%  une matrice symétrique. Renvoie cette base stockée en vecteurs
%  colonnes dans Q et la matrice tridiagonale des coefficients
%   d'orthogonalisation dans T.
```

Tester Arnoldi et Lanczos sur la matrice du Laplacien discret obtenue par

```
G=numgrid(`L`,14);
A=delsq(G);
```

Calculer alors le premier mode propre `v` (modélise les vibrations d'un tambour de cette forme) de cette matrice et en effectuer la représentation graphique par

```
u=G;
u(G>0)=v(G(G>0));
```

puis en appliquant `surfc` ou `mesh` sur `u`.

b) Implémenter GMRES :

```
function [x]=GMRES(A,b,tol)
% GMRES: Résolution d'un système linéaire par projection sur Krylov
%   [x]=GMRES(A,b,tol)
```

```
%   Calcule x dans l'espace engendré par (b,...,A^(k-1)b) réalisant
%   le minimum de norm(b-A*x,2) ou k est le plus petit entier tel
%   que cette norme est inferieur à tol. Au pire, GMRES s'arrête
%    apres size(A,1) iétrations.
%
%    [x]=GMRES(A,b) équivaut à GMRES(A,b,1e-6)
```

Tester sur le Laplacien discret avec pour second membre $\boldsymbol{b} = [1, \ldots, 1]$. Comparer la vitesse de convergence avec Jacobi, GS et SOR à l'aide d'une représentation `semilogy` avec sur l'axe Ox le nombre d'itérations et sur l'axe Oy la norme des résidus.

Évaluation du cours Méthodes itératives :

- Les exercices.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).