UNIVERSITE DE GENEVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques
Mardi 25 janvier 2006
À rendre au début de la séance du Mercredi 8 février 2006

Méthodes itératives – Série 6

1. Soit $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\boldsymbol{b}$ dans $\mathbb{R}^n$ définis par :
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
On souhaite appliquer les algorithmes GMRES et CGN sur la matrice $\mathbf{A}$ avec pour second membre $\boldsymbol{b}$.
   (a) Comparer pour une matrice quelconque $\mathbf{B}$ la condition de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$.
   (b) Calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
   Indication : Pour une fois, calculer le polynôme caractéristique est la façon la plus rapide.
   (c) Calculer à la main pour GMRES la valeur de $\boldsymbol{x}_k$. En déduire que l'algorithme n'a pas convergé avant d'avoir effectuer n itérations.
   (d) Démontrer que l'algorithme CGN converge en une itération dans ce cas particulier.
2. On s'intéresse à la résolution par la méthode de Jacobi du système linéaire $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbf{A}$ est la matrice du Laplacien 2D discrétisé.
   (a) Choisir un point sur le maillage avec ses quatre voisins et voir comment une itération de Jacobi peut être vu comme une formule de moyenne.
   (b) Montrer que
$$\min_i \boldsymbol{e}_i^{k+1} \geq \min_i \boldsymbol{e}_i^k$$
$$\max_i \boldsymbol{e}_i^{k+1} \leq \max_i \boldsymbol{e}_i^k.$$
   (c) Discuter sur l'influence du bord sur les deux inégalités précédentes.
3. Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour ne pas perdre la symétrie de $\mathbf{A}$, une variante de l'algorithme SOR a été introduit : l'algorithme SSOR défini par
$$(\frac{\mathbf{D}}{\omega} + \mathbf{L})\boldsymbol{x}_{k+\frac{1}{2}} = (\frac{(1-\omega)}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U})\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}$$
$$(\frac{\mathbf{D}}{\omega} + \mathbf{U})\boldsymbol{x}_{k+\frac{1}{2}} = (\frac{(1-\omega)}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L})\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b},$$
où $\mathbf{A} = \mathbf{D}+\mathbf{U}+\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ est diagonale, $\mathbf{U}$ triangulaire supérieure stricte, et $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure stricte.

(a) Calculer la matrice $\mathbf{M}$ telle que $\boldsymbol{x}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})\boldsymbol{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{b}$.

(b) Montrer que $\mathbf{M}$ est symétrique.

(c) Montrer que $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ avec $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure, $\mathbf{U}$ triangulaire supérieure et que pour tout i, j tels que $\mathbf{A}_{i,j} = 0$, $\mathbf{L}_{i,j} = 0$ si $j \leq i$ et $\mathbf{U}_{i,j} = 0$ si $i \leq j$.

4. (a) Implémenter l'algorithme de décomposition ILU(0) : $\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}$ où $\tilde{\mathbf{L}}_{i,j} = 0$ et $\tilde{\mathbf{U}}_{i,j} = 0$ partout où $\mathbf{A}_{i,j} = 0$.

   (b) Comparer l'emploi de $\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}$ et du $\mathbf{M}$ (de l'exercice précédent) comme préconditionneurs pour l'algorithme GMRES : tester sur la matrice de l'exemple de l'exercice 1 la matrice du Laplacien discret 2D.

   Indication : On pourra utiliser la fonction GMRES produite lors des exercices précédents en rentrant directement la matrice préconditionnée bien que cela soit inefficace de calculer l'inverse du préconditionneur. Voir comment la fonction gmres fournie avec matlab gère les préconditionneurs.

Évaluation du cours Méthodes itératives :

- Les exercices.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).