Exercice 1 Par les polynômes de Lagrange

Règle de Simpson :

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 l_1(t)\mathrm{d}t & b_2 &= \int_0^1 l_2(t)\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^t (t-\frac{1}{2})(t-1)\mathrm{d}t & &= -4\int_0^1 t(t-1)\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^t t^2 - \frac{1}{2}t\mathrm{d}t & &= -4\int_0^1 t^2 - t\mathrm{d}t \\
&= 2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) & &= -4(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{6} & &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_3(t) &= \int_0^1 l_3(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 l_1(1-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 l_1(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Règle de Newton :

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 l_1(t)\mathrm{d}t & b_2 &= \int_0^1 l_2(t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{9}{2}\int_0^1 (t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)\mathrm{d}t & &= \frac{27}{2}\int_0^1 t(t-\frac{2}{3})(t-1)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 9t^3-18t^2+11t-2\mathrm{d}t & &= \frac{27}{2}\int_0^1 (t^3-\frac{5}{3}t^2+\frac{2}{3}t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{9}{4}-6+\frac{11}{2}-2 & &= \frac{27}{2}(\frac{1}{4}-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}) \\
&= \frac{1}{8} & &= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_3(t) &= \int_0^1 l_3(t)\mathrm{d}t & b_4(t) &= \int_0^1 l_4(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 l_2(1-t)\mathrm{d}t & &= \int_0^1 l_1(1-t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{8} & &= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 Le système linéaire :

Règle de Simpson : Le système à résoudre est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Donc, $b_2 = \frac{2}{3}$, $b_3 = \frac{1}{6}$ et $b_1 = \frac{1}{6}$.

Règle de Newton : Le système à résoudre est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

C'est équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{7}{36} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

Soit $b_4 = \frac{1}{8}$, $b_3 = \frac{3}{8}$, $b_2 = \frac{3}{8}$ et $b_1 = \frac{1}{8}$.

Exercice 3 Le système linéaire symétrique :

Règle de Simpson : Le système à résoudre est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Donc, $\beta_3 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = \frac{1}{3}$, et $\beta_3 = \frac{4}{3}$.

Règle de Newton : Le système à résoudre est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

C'est une matrice de Van der Monde, donc de déterminant non nul, elle a une unique solution. Si $[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$ est une solution alors $[\beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1]$ est aussi une solution donc $\beta_4 = \beta_1$ et $\beta_3 = \beta_2$. Il reste donc à résoudre :

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$
$$\beta_1 + \frac{\beta_2}{9} = \frac{1}{3}.$$

Donc, $\beta_2 = \frac{3}{4}$ et $\beta_1 = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 *Calculer la constante d'erreur (d'ordre 2) pour* On utilise la formule du cours. Pour une formule d'intégration d'ordre p, la constante d'erreur est $\frac{1}{p!}(\frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{n} b_i {c_i}^p)$. On applique alors la formule :

(a) *la règle du point milieu :* C'est une formule à un point. $c_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 1$. Elle est d'ordre $p = 2$. La constante d'erreur C vaut donc $\frac{1}{24}$

(b) *la règle du trapèze.* C'est une formule à deux points. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ et $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Elle est d'ordre $p = 2$. La constante d'erreur C vaut donc $-\frac{1}{2}(\frac{1}{6})$

(c) *Par une combinaison astucieuse des deux résultats numériques on peut faire disparaître cette erreur et augmenter l'ordre. Quelle méthode est-ce que cela donne ?* Notons $\mathcal{T}$ le résultat obtenu par la méthode du Trapèze, $\mathcal{P}$ le résultat obtenu par la méthode du point milieu et $\mathcal{I}$ la valeur réelle de l'intégrale. Nous avons

$$\mathcal{I} \approx \mathcal{T} - \frac{1}{12}h^2 C(f''),$$
$$\mathcal{I} \approx \mathcal{P} + \frac{1}{24}h^2 C(f''),$$

Donc $\mathcal{I} \approx \frac{\mathcal{T}+2\mathcal{P}}{3}$ donne une approximation d'ordre supérieur. La formule obtenue est celle de Simpson.

(d) *De même, en utilisant les résultats numériques obtenus avec la règle du trapèze pour les pas h et $h/2$, on peut annuler l'erreur et augmenter l'ordre. Comment ?* Notons $\mathcal{T}_h$ la valeur de l'intégrale obtenue par la méthode du trapèze avec un pas h et $\mathcal{T}_{\frac{h}{2}}$ la valeur de l'intégrale obtenue avec un pas $\frac{h}{2}$. Nous avons

$$\mathcal{I} \approx \mathcal{T}_h - \frac{1}{12}h^2 C(f''),$$
$$\mathcal{I} \approx \mathcal{T}_{\frac{h}{2}} - \frac{1}{48}h^2 C(f''),$$

Nous en déduisons que $\mathcal{I} = \frac{4}{3}\mathcal{T}_{\frac{h}{2}} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_h$ donne une approximation d'ordre supérieur.

Exercice 5 *Trouver une formule de quadrature $c_1 = \frac{1}{2} - \alpha$, $c_2 = \frac{1}{2} + \alpha$ d'un ordre aussi élevé que possible.* Nous recherchons b_1, b_2 et α. Quel que soit α, nous pouvons atteindre l'ordre 2. Pour cela il faut et il suffit que

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad \frac{b_1 + b_2}{2} + \alpha(b_2 - b_1) = \frac{1}{2}.$$

Donc, la formule est d'ordre 2 si et seulement si $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Pour avoir l'ordre 3, il faut et il suffit de vérifier

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \alpha)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \alpha)^2 = \frac{1}{3}$$

Ce qui impose que $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$. La formule est symétrique donc la formule est au moins d'ordre 4. Elle n'est pas d'ordre 5. C'est la formule de Gauss à deux points.

Exercice 6 *Même question que dans 3. pour $c_1 = \frac{1}{2} - \delta$, $c_2 = \frac{1}{2}$ et $c_3 = \frac{1}{2} + \delta$.* Nous cherchons b_1, b_2, et b_3 et $\delta > 0$. Quel que soit δ, nous pouvons toujours atteindre l'ordre 3. Comme les c_i sont symétriques, les b_i devront l'être aussi pour une formule d'ordre 3, donc $b_1 = b_3$ dès que la formule est d'ordre 3. Les formules symétriques sont d'ordre pair : donc pour tout choix de δ, on obtient une formule d'ordre au moins égal à 4. Quelle condition doit vérifier δ pour que la formule soit d'ordre 5 (au moins) ? Il faut et il suffit que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ (\frac{1}{2} - \delta)^2 + (\frac{1}{2} + \delta)^2 & \frac{1}{4} \\ (\frac{1}{2} - \delta)^4 + (\frac{1}{2} + \delta)^4 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ait une solution. Pour cela il faut que :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ (\frac{1}{2} - \delta)^2 + (\frac{1}{2} + \delta)^2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ (\frac{1}{2} - \delta)^4 + (\frac{1}{2} + \delta)^4 & \frac{1}{16} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + 2\delta^2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} + 3\delta^2 + 2\delta^4 & \frac{1}{16} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2\delta^2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 3\delta^2 + 2\delta^4 & \frac{1}{16} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 0 \iff \delta^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 3 + 2\delta^2 & \frac{1}{16} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \delta^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ 3 + 2\delta^2 & -\frac{11}{80} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 0 \iff \delta^2(\frac{\delta^2}{6} - \frac{1}{40}) = 0$$

Soit $\delta = 0$, $\delta = \pm\frac{\sqrt{15}}{10}$. Nous devons résoudre le système

$$2b_1 + b_2 = 1$$
$$(\frac{4}{5})b_1 + \frac{b_2}{4} = \frac{1}{3}$$

d'où $b_1 = \frac{5}{18}$ et $b_2 = \frac{8}{18}$. Nous avons obtenu la formule de quadrature de Gauss d'ordre 6.