Exercice 1 Avec des bons souvenirs du théorème de Rolle, esquisser l'allure géométrique des noyaux de Peano $N_1(\tau), \ldots, N_6(\tau)$ de la formule de quadrature d'ordre 6 à $s = 3$ étages ($c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$, $b_1 = b_3 = \frac{5}{18}$, $b_2 = \frac{8}{18}$).

Exercice 2 Démontrer que dans les formules de quadrature de Gauss, tous les b_i sont strictement positifs. *Indication :* Regarder l'exercice 4a).

Exercice 3 On cherche une formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(\tau)\, d\tau \approx \beta_1 g(-1) + \beta_2 g(-\alpha) + \beta_2 g(\alpha) + \beta_1 g(1)$$

d'un ordre aussi haut que possible, en utilisant 3 méthodes différentes.

(a) Brutalement en trafiquant le système linéaire (1.12 du polycopié).

(b) Chercher un polynôme $Q(\tau) = (\tau^2 - 1)(\tau^2 - \alpha^2)$ tel que

$$\int_{-1}^{1} Q(\tau) g(\tau)\, d\tau = 0$$

pour tout polynôme g de degré ≤ 1.

(c) Calculer $\tilde{Q}(\tau) = P_4(\tau) - P_2(\tau)$ (où P_i désigne le polynômes de Legendre de degré i) et observer une surprise.
Cela permettra de trouver des formules dites « de Lobatto », c'est-à-dire des formules d'ordre $2s - 2$ avec $\gamma_1 = -1$ et $\gamma_s = 1$, pour tout s.

Remarque :
La formule de Lobatto pour $s = 4$ est donnée par

$$\int_0^1 g(t)\, dt \ \approx\ \frac{1}{12} g(0) + \frac{5}{12} g\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\Big) + \frac{5}{12} g\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\Big) + \frac{1}{12} g(1)\,,$$

celle pour $s = 5$ par

$$\int_0^1 g(t)\, dt \approx \frac{1}{20} g(0) + \frac{49}{180} g\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}\Big) + \frac{16}{45} g\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{49}{180} g\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}\Big) + \frac{1}{20} g(1)\,.$$

Exercice 4 ∗Démontrer la formule (4.9) du polycopié, c'est-à-dire que pour des formules de quadratures d'ordre 2s,

$$\beta_i = \frac{2}{(1-\gamma_i^2)({P_s}'(\gamma_i))^2}$$

en suivant les étapes (a) à (c) :

(a) Montrer qu'on peut écrire

$$\beta_i = \int_0^1 \ell_i^2(t)\,dt\,.$$

(b) Observer que

$$\ell_i(t) = \frac{P_s(t)}{(t-\gamma_i)P_s'(\gamma_i)}\,,$$

(c) A partir de (a) et (b), calculer β_i en utilisant

$$\frac{1}{(t-\gamma_i)^2} = -\left(\frac{1}{t-\gamma_i}\right)'$$

Il peut être utile de se rappeler quelques propriétés des polynômes de Legendre.