Université de Genève | **Analyse numérique** |
Faculté des sciences | **Exercices** |
Section de mathématiques | **Série 3** | 23 novembre 2006

Exercice 1 Voir correction dans le corrigé de la série 2.

Exercice 2 *Démontrer que dans les formules de quadrature de Gauss, tous les b_i sont strictement positifs.* La formule de quadrature de Gauss de degré n est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $2n-1$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(c_i) = nt_0^1 P(t)\mathrm{d}t$$

pour tous polynôme P de degré inférieur ou égale à $2n-1$. Le but est de trouver un polynôme toujours poisitif sur $(0,1)$ qui s'annule en tous les c_k sauf en c_i. Prenons $P(X) = \left(\prod_{\substack{k=1^n \\ k\neq i}} (X-c_k)\right)^2$. Ce polynôme a pour degré $2n-2$ et en appliquant la formule de quadrature de Gauss sur ce polynôme, on obtient $b_i > 0$.

Exercice 3 *On cherche une formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(\tau)\, d\tau \approx \beta_1 g(-1) + \beta_2 g(-\alpha) + \beta_2 g(\alpha) + \beta_1 g(1)$$

d'un ordre aussi haut que possible, en utilisant 3 méthodes différentes.

(a) *Brutalement en trafiquant le système linéaire (1.12 du polycopié).* Quel que soit le choix de α, on peut au moins atteindre l'ordre 4 car les matrices de Van der Mande ont toujours un déterminant non nul et que la formule de quadrature est symétrique. On cherche donc une condition sur α pour atteindre l'ordre 5 (et en même temps l'ordre 6). Pour cela, il faut que le système suivant ait une solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \\ \alpha^4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Ce système n'a de solution que si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \frac{1}{3} \\ 1 & \alpha^4 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

Cela donne comme équation :

$$\alpha^4 - \frac{6}{5}\alpha^2 + \frac{1}{5} = 0$$

Les solutions $\alpha = \pm 1$ sont évidentes, factorisons par $\alpha^2 - 1$.

$$(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - \frac{1}{5}).$$

Soit $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Il suffit maintenant de calculer β_1 et β_2. Un calcul simple donne $\beta_1 = \frac{1}{6}$ et $\beta_2 = \frac{5}{6}$.

(b) *Chercher un polynôme* $Q(\tau) = (\tau^2 - 1)(\tau^2 - \alpha^2)$ *tel que*

$$\int_{-1}^{1} Q(\tau) g(\tau)\, d\tau = 0$$

pour tout polynôme g *de degré* ≤ 1. Il suffit de trouver le polynôme Q qui vérifie

$$\int_{-1}^{1} Q(\tau)\, d\tau = 0$$
$$\int_{-1}^{1} Q(\tau)\tau\, d\tau = 0$$

Comme le polynôme Q que nous cherchons sera forcément pair, il suffit de vérifier la première de ces conditions d'orthogonalité. Soit

$$\int_{-1}^{1} (\tau^2 - 1)(\tau^2 - \alpha^2)\, d\tau = 0$$

Soit $\frac{2}{5} - \frac{2}{3}(1 + \alpha^2) + 2\alpha^2 = 0$, soit $\alpha^2 = \frac{1}{5}$. Le même résultat que précédemment. Cela donne

$$Q(X) = X^4 - \frac{6}{5}X^2 + \frac{1}{5}.$$

(c) *Calculer* $P_4(\tau) - P_2(\tau)$ *(où* P_i *désigne le polynômes de Legendre de degré* i*) et observer une surprise.*
Nous retrouvons le polynome Q à une constante multiplicative près. Cela peut se généraliser. En effet $P_{n+2} - P_n$, s'annule toujours en 1 et en -1. De plus par définition, ce polynôme est orthogonal à tous les polynômes de degré plus petit que $n - 1$.

Exercice 4 $*$*Démontrer la formule (4.9) du polycopié, c'est-à-dire que pour des formules de quadratures d'ordre 2s,)*

(a) La formule de quadrature est exacte pour tout polynôme P de degré inférieur ou égale à $2n-1$. Posons $\ell_i(X) = \frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n (X-\gamma_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n (\gamma_i-\gamma_j)}$.
Le polynôme $\ell_i(X)$ est de degré $n-1$, le polynôme $\ell_i^2(X)$ est de degré $2n-2$. Appliquons la formule de quadrature à $\ell_i^2(X)$. Nous obtenons

$$\beta_i = \int_0^1 \ell_i^2(t)\, dt\,.$$

(b) Par définition, $P_s(X) = C\prod_{j=1}^n (X-\gamma_j) = C(X-\gamma_i)\ell_i(X)$ où C est une constante réelle non nulle. Donc, $C\ell_i(t) = \frac{P_s(t)}{t-\gamma_i}$. Comme $\ell_i(\gamma_i) = 1$, nous avons $C = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n (\gamma_i-\gamma_j) = P_s'(\gamma_i)$. D'où,

$$\ell_i(t) = \frac{P_s(t)}{(t-\gamma_i)P_s'(\gamma_i)}\,,$$

(c) Nous effectuons une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \int_{-1}^1 \frac{{P_s}^2(\tau)}{(\tau-\gamma_i)^2(P_s'(\gamma_i))^2}\, d\tau \\
&= -\left[\frac{{P_s}^2(\tau)}{(\tau-\gamma_i)(P_s'(\gamma_i))^2}\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{2P_s(\tau)P_s'(\tau)}{(\tau-\gamma_i)(P_s'(\gamma_i))^2}\, d\tau \\
&= -\frac{2}{(1-{\gamma_i}^2)(P_s'(\gamma_i))^2} + 2\int_{-1}^1 \frac{{P_s}^2(\tau)}{(\tau-\gamma_i)^2(P_s'(\gamma_i))^2}\, d\tau \\
&= -\frac{2}{(1-{\gamma_i}^2)(P_s'(\gamma_i))^2} + 2\beta_i
\end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième ligne à la troisième ligne, nous avons développé P_s' en ses s termes $\frac{P_s}{\tau-\gamma_j}$ et utiliser l'orthogonalité de P_s pour observer que l'intégrale était forcément nul sauf pour le terme $\frac{P_s}{\tau-\gamma_i}$. Donc,

$$\beta_i = \frac{2}{(P_s'(\gamma_i))^2}\frac{1}{(1-{\gamma_i}^2)}.$$