Université de Genève — **Analyse numérique**
Faculté des sciences — **Exercices** — 21 décembre 2006
Section de mathématiques — **Série 6** — Pour le 10 janvier 2007

Exercice 1 Transformation "sinus" de Fourier (Euler 1754) :
Soit $f(x)$ définie sur $0 \leq x \leq \pi$.

On cherche à représenter $f(x)$ sous forme

$$f(x) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots \qquad (1)$$

(a) Montrer que

$$\int_0^\pi \sin(kx)\sin(lx)\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Multiplier (1) par $\sin(kx)$ et intégrer de 0 à π pour trouver le coefficient b_k.

(c) Poser $f(x) = \frac{\pi}{4}$ $(0 \leq x \leq \pi)$ et calculer la série correspondante. (Résultat : $\frac{\pi}{2} = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots$.)

(d) Pour $n \geq 0$, poser $S_n(x) := \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots + \frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)$. Trouver le premier maximum de S_n. On notera ce maximum x_n.

(e) Montrer que $\lim_{n\to\infty} S_n(x_n) > \frac{\pi}{4}$.

Indication : On fera apparaître une somme de Riemann et on admettra que $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\, dx = 1.8519...$

(f) Poser $f(x) = x(\pi - x)$ et trouver la série correspondante. Découvrir une jolie formule pour $\frac{\pi^3}{32}$.