

Optimisation – Série 2

Exercice 1 a) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne, *i.e.* $A^* = A$. Démontrer que toutes les valeurs propres λ de A sont réelles.

b) Soit Q une matrice unitaire dans \mathbb{C}^n , *i.e.* $Q^*Q = I$. Démontrer que

$$\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \quad \|Q^*BQ\|_2 = \|B\|_2.$$

pour tout vecteur x dans \mathbb{C}^n et toute matrice B dans $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Exercice 2 Un vigneron cultive deux sortes de vignes pour deux vins différents : un blanc de très bonne qualité et un rouge de qualité moindre. Le blanc se vend à 15CHF le litre et le rouge à 11CHF le litre. Il dispose de 400 hectares et peut produire 0.5 hectolitre de vin blanc par hectare et 0.75 hectolitre de vin rouge par hectare. La demande pour le vin rouge est limitée à 250 hectolitres. Avec tous les saisonniers, ce vigneron dispose de 4200 heures de travail. Un hectolitre de vin rouge coûte 12 heures de travail et un de blanc 28 heures. Le vigneron souhaite évidemment maximiser ses profits. En faisant un dessin, résoudre le problème d'optimisation linéaire associé.

Exercice 3 Un opérateur de téléphonie mobile dispose d'une série d'antennes avec une matrice d'interférence $G = (g_{ij})$ avec $g_{ij} \geq 0$ pour tout i, j , $g_{ii} = 0$. L'opérateur dispose du droit d'émettre sur deux fréquences. On souhaite maintenant affecter une fréquence à chaque antenne de manière à minimiser les interférences. On considère que l'interférence entre deux antennes de fréquence différentes tombe à 0. On recherche une matrice de permutation Π et un entier p :

$$\Pi^T G \Pi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

telle que $\max(\lambda_{\max}(A), \lambda_{\max}(D))$ soit minimale.

a) Implémenter un algorithme de recherche de la meilleure permutation par la méthode de force brute.

```

function s=PartitionBruteForce(G)
% PARTITIONBRUTEFORCE find best two frequency partition
% s=PartitionBruteForce(G); finds for a given link gain matrix G
% the best partition into four submatrices, such that the maximum
% of the largest eigenvalues of the two diagonal blocks is minimized.
% The result is given by the binary index s for one of the submatrices.

```

Pour engendrer tous les choix possibles de séparation en deux ensembles, on pourra utilement utiliser un compteur entier et la fonction `bitand`. L'antenne k est dans l'ensemble $S(i)$ si et seulement si `bitand(i,2^(k-1))~=0`.

- b) Implémenter l'algorithme de recherche expliqué en cours basé sur la norme de Frobenius.

```

function s=PartitionSpectral(G)
% PARTITIONSPECTRAL find approximate two frequency partition
% s=PartitionSpectral(G); finds for a given link gain matrix
% G an approximation to the best partition into four submatrices,
% such that the maximum of the largest eigenvalues of the two
% diagonal blocks is minimized. The result is given by the binary
% index s for one of the submatrices.

```

- c) Tester les deux algorithmes sur les matrices **G1** et **G2** obtenues par

```

> oldseed=rand('seed');
> rand('seed',900);
> G1=GenerateProblem(4,4,0.1);
> G2=GenerateProblem(4,4,0.4);
> rand('seed', oldseed);

```

`GenerateProblem.m` est disponible sur la page web.

Dans les exercices d'implémentation

- Afin de préserver l'uniformité des interfaces et permettre le remplacement transparent d'une implémentation par une autre, l'en-tête fourni doit impérativement être respecté et reproduit dans le code. Vous pouvez copiez-collez depuis le PDF disponible sur la page web.
- Les programmes et les résultats doivent être rendus imprimés.

Evaluation du cours d'optimisation

- Les exercices : Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$ (exercices.) + $\frac{4}{5}$ (note examen oral).

Assistant : Kévin Santugini

Adresse électronique : Kevin.Santugini@math.unige.ch

Page web : <http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement>