UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — Mercredi 22 novembre 2006

À rendre pour le début de la séance du Mercredi 6 décembre 2006

Optimisation – Série 3

Exercice 1 Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivantes, calculer le point (x, y) où le minimum global est atteint.

a) $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

b) $f_2(x, y) = x^4 + y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2$.

c) $f_3(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 8xy$.

d) $f_4(x, y) = \exp(\sin(50x)) + \sin(60\exp(y)) + \sin(70\sin(x)) + \sin(\sin(80y)) - \sin(10(x + y)) + \frac{x^2+y^2}{4}$.

Exercice 2 On considère n villes situées sur un plan. On souhaite toutes les relier par un réseau routier de longueur minimal. Soit un tel réseau, on note p le nombre de croisement (un endroit différent d'une ville où se rejoignent au moins deux routes). On appelle nœud une ville ou un point de croisement. Considérons un réseau de longueur minimal.

a) Entre deux noeuds, quelle est la forme prise par une route de longueur minimale ? Quelle est la courbe de longueur minimale reliant deux points sur le plan ?

b) Démontrer qu'un point de croisement voit se croiser au moins trois routes (si ce n'est pas le cas, montrer que le point de croisement peut être supprimé).

c) En déduire que le nombre de routes est supérieur à $\frac{3p+n}{2}$.

d) Démontrer que s'il y a $p + n$ noeuds, le réseau de longueur minimale a au plus $p + n - 1$ routes.

e) En déduire que pour un réseau de longueur minimal entre n villes, il y a au plus $n - 2$ points de croisement, *i.e* $p \leq n - 2$.

f) On considère maintenant 4 villes placées sur les sommets d'un carré

   i. Trouver le réseau de longueur minimal avec $p = 0$ (facile).

   ii. Trouver le réseau de longueur minimal avec $p = 1$ (moins facile).

   iii. Quel est le meilleur réseau que vous pouvez imaginer avec $p = 2$?

iv. Quel est le réseau optimal ?

Exercice 3 a) On dispose d'une longueur totale l de bois (que l'on va supposer malléable). On souhaite construire une fenêtre formé d'un rectangle surplombé d'un demi-disque. Calculer la hauteur h du rectangle et le rayon r du demi-disque qui maximise la surface de la fenêtre pour une circonférence égale à l.

b) Optimisation de portfolio. Un investisseur financier dispose d'un euro à investir dans trois action différentes dont les rendements sont représentés par trois variables aléatoire R_a, R_b et R_c. Les espérances sont $\mathbb{E}[R_a] = \mu_a$, $\mathbb{E}[R_b] = \mu_b$ et $\mathbb{E}[R_c] = \mu_c$. Les covariances $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[(R_i - \mathbb{E}[R_i])(R_j - \mathbb{E}[R_j])]$ sont connues.

L'investisseur veut répartir son investissment de 1000 euros en $1000\pi_a \geq 0$ euros d'actions a, en $1000\pi_b \geq 0$ euros d'actions b et en $1000\pi_c \geq 0$ euros d'actions c ($\pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$) de manière à s'assurer un rendement espéré d'au moins 0.02 (soit 2%) tout en minimisant le risque associé, *i.e.* $\mathrm{Var}(\sum_{i=a,b,c} \pi_i R_i) = \sqrt{\sum_{i,j=a,b,c} \sigma_{ij}\pi_i\pi_j}$.

Avec les données suivantes, $\mu_a = 0.01$ (1%), $\mu_b = 0.022$ (2.2%), $\mu_c = 0.027$ (2.7%) et

$$(\sigma_{ij})_{i,j=a,b,c} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.0002 & 0.0005 \\ 0.0002 & 0.005 & 0.0008 \\ 0.0005 & 0.0008 & 0.02 \end{bmatrix}$$

calculer le choix optimal de π_a, π_b, π_c pour lequel on s'assure au minimum d'un rendement de 2%.

Exercice 4 Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable, $\mathcal{M}$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$ définie par $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}) = 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Soit $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{M}$. et $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Soit la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ définie par $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(x) - g^T(\boldsymbol{x})\lambda$.

En utilisant une paramétrisation ψ de la sous-variété $\mathcal{M}$, montrer que

$$\begin{aligned} & \exists\lambda \in \mathbb{R}^m \begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*, \lambda) = 0 \\ \boldsymbol{w}^T H(\boldsymbol{x}^*, \lambda)\boldsymbol{w} > 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{x}^*}\mathcal{M} \end{cases} \\ \Longrightarrow \quad & f \text{ possède une minimum local en } x^* \\ \Longrightarrow \quad & \exists\lambda \in \mathbb{R}^m \begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*, \lambda) = 0 \\ \boldsymbol{w}^T H(\boldsymbol{x}^*, \lambda)\boldsymbol{w} > 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{x}^*}\mathcal{M} \end{cases} \end{aligned}$$

où H est la Hessienne de $\mathcal{L}$ en fonction de la seule variable $\boldsymbol{x}$.

Evaluation du cours d'optimisation

- Les exercices : Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).

Assistant :	Kévin Santugini
Email :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`