UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques
Faculté des sciences — Mercredi 6 novembre 2006
À rendre pour le début de la séance du Mercredi 10 janvier 2006

Optimisation – Corrigé 4

Exercice 1 a) *Démontrer que, pour qu'une matrice soit définie positive, il est nécessaire, mais non suffisant, que tous les éléments de la diagonale soient strictement positifs.* Soit A définie positive. Par définition

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} > 0$$

pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$. Prenons $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ le i$^{\mathrm{e}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, nous obtenons $A_{ii} = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{e}_i > 0$. C'est insuffisant car la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas définie positive.

b) *Montrer que la matrice suivante est définie positive de deux façons distinctes :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Le polynôme caractéristique est $-X^3 + 7X^2 - 11X + 1$: les valeurs propres sont 0.096788074088447, 2.193936566474630 et 4.709275359436923.
- Nous avons

$$\begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc, d'après un théorème du cours, la matrice A est définie positive.

Exercice 2 a) *Démontrer la formule de Taylor avec reste intégrale.* Cela se démontre par récurrence. Pour $n = 0$, la formule est vraie car nous retrouvons le « théorème fondamental du calcul[1] ».

$$\int_x^{x+h} f'(x)\mathrm{d}x = f(x+h) - f(x).$$

Supposons maintenant que la formule soit vraie pour tout entier $n \leq N$. Démontrons que la formule reste vraie pour $n = N+1$. Soit f de classe $\mathcal{C}^{N+2}(\mathbb{R})$ Nous savons que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{N} f^{(j)}(x)\frac{h^j}{j!} + \int_0^h \frac{(h-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(x+t)\mathrm{d}t.$$

Intégrons par partie le terme intégrale, en intégrant $(h-t)^N$ et en dérivant $f^{(N+1)}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_0^h \frac{(h-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(x+t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{(h-t)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(x+t)\right]_0^h \\ &+ \int_0^h \frac{(h-t)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(x+t)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!} + \int_0^h \frac{(h-t)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(x+t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

b) *Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Démontrer la formule de Taylor à plusieurs variables avec reste intégrale.* On pose $f(t) = g(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})$, Nous appliquons la formule de Taylor avec reste intégrale sur f. Nous savons que

$$f^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}\boldsymbol{h}^\alpha \partial^\alpha g(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}).$$

Nous remplaçons dans la formule de Talor à une variable et obtenons la formule de Taylor à plusieurs variables.

$$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha|\leq n} \partial^\alpha g(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{h}^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=n+1} \int_0^1 \frac{n+1}{\alpha!}(1-t)^n \partial^\alpha g(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}^\alpha \mathrm{d}t.$$

Exercice 3 *Soit $\boldsymbol{s}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{s}$ appartient à $\mathcal{S}$ pour tout θ dans* $[0, 1]$.

[1] Il s'agit de la traduction du nom anglais, ce théorème n'a pas de nom en Français.

a) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable sur $\mathcal{S}$. On suppose que ∇f est Lipschitz continu en $\boldsymbol{x}$ avec constante de Lipshitz $L(\boldsymbol{x})$.* Nous avons :

$$
\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) - f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{s}| &= |\int_0^1 (\nabla f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{s}) - \nabla f(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{s} \mathrm{d}t| \\
&\leq |\int_0^1 L(\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{s}\|_2^2 t\mathrm{d}t| \leq \frac{1}{2} L(\boldsymbol{x})\|s\|_2^2.
\end{aligned}
$$

b) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur $\mathcal{S}$. On suppose que la Hessienne de f, H est Lipschitz continu en $\boldsymbol{x}$ avec constante de Lipshitz $L_2(\boldsymbol{x})$.* Nous avons :

$$
\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) - f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{s} - \frac{1}{2}(H\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})| &= |\int_0^1 (\nabla f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{s}) - \nabla f(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{s} \mathrm{d}t - \frac{1}{2}(H\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})| \\
&= |\int_0^1 \int_0^1 t(H(\boldsymbol{x}+rt\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}) \mathrm{d}r\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(H\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})| \\
&= |\int_0^1 \int_0^1 t(H(\boldsymbol{x}+rt\boldsymbol{s}) - H(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}) \mathrm{d}r\mathrm{d}t \\
&\leq |\int_0^1 \int_0^1 rt^2 L_2(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{s}\|_2^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}t| \leq \frac{1}{6} L_2(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{s}\|_2^3.
\end{aligned}
$$

Exercice 4 *Soit β dans $(0,1)$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que ∇f soit Lipschitz avec constante $L(\boldsymbol{x_k})$ pour $\boldsymbol{x}_k$. Soit p_k la direction de descente du gradient. Démontrer que le pas obtenu par la méthode de « line search backtracking »d'Armijo vérifie...* Il y a deux cas, soit on s'arrête avant la première itération et on ne rentre jamais dans la boucle donc $\alpha_k = \alpha_0$. Soit on rentre au moins une fois dans la boucle, ce qui signifie que $\frac{\alpha_k}{\tau}$ ne vérifie pas la condition d'arrêt donc

$$
(\beta - 1)\frac{\alpha_k}{\tau}\boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}_k) \leq f(\boldsymbol{x}_k + \frac{\alpha_k}{\tau}\boldsymbol{p}_k) - f(\boldsymbol{x}_k) - \frac{\alpha_k}{\tau}\boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}_k)
$$

Donc, par l'exercice précédent,

$$
(\beta - 1)\frac{\alpha_k}{\tau}\boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}_k) \leq \frac{1}{2} L(\boldsymbol{x}_k)\frac{\alpha_k^2}{\tau^2}\|\boldsymbol{p}_k\|_2^2.
$$

Donc,

$$
\alpha_k \geq \frac{2(\beta - 1)\tau \boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}_k)}{L(\boldsymbol{x}_k)\|\boldsymbol{p}_k\|_2^2}.
$$

Exercice 5 a) *Implémenter l'algorithme de descente maximale avec line search d'Armijo.*

```
function [x,xk]=SteepestDescent(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit)
% STEEPESTDESCENT steepest descent minimum search with Armijo line search
%   [x,xk]=SteepestDescent(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit) finds an
%   approximate minimum of the function f with gradient fp, starting
%   at the initial guess x0. The remaining parameters are optional and
%   default values are used if they are omited. xk contains all the
%    iterates of the method.

if nargin<8, alinit=1; end;
if nargin<7, be=0.1; end;
if nargin<6, tau=0.5; end;
if nargin<5, maxiter=100; end;
if nargin<4, tol=1e-6; end;

x=x0;
xk=x0;
p=-feval(fp,x);
k=0;
while norm(p)>tol & k<maxiter
  al=alinit;
  while feval(f,x+al*p)>feval(f,x)-al*be*p'*p
    al=tau*al;
  end;
  x=x+al*p
  p=-feval(fp,x);
  k=k+1;
  xk(:,k+1)=x;
end;
```

b) Tester sur les problemes de la première question de la série 3. Qu'observez-vous ?

   i. $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.
   ii. $f_2(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2$.
   iii. $f_3(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 8xy$.
   iv. $f_4(x,y) = \exp(\sin(50x)) + \sin(60\exp(y)) + \sin(70\sin(x)) + \sin(\sin(80y)) - \sin(10(x+y)) + \frac{x^2+y^2}{4}$.

Dans les exercices d'implémentation

- Afin de préserver l'uniformité des interfaces et permettre le remplacement transparent d'une implémentation par une autre, l'en-tête fourni doit impérativement être respecté et reproduit dans le code. Vous pouvez copiez-collez depuis le PDF disponible sur la page web.
- Les programmes et les résultats doivent être rendus imprimés.

Evaluation du cours d'optimisation

- Les exercices : Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).

Assistant :	Kévin Santugini
Email :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`