UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des Sciences — Mercredi 24 janvier 2007

À rendre pour le Vendredi 2 février 2007 dans mon casier

Optimisation – Corrigé 6

Exercice 1 *L*emme de Farkas. Démontrons la contraposée. Si $\boldsymbol{u}$ ne peut pas s'écrire comme $\sum_{i\in A}\lambda_i\boldsymbol{v}_i$ avec les $\lambda_i > 0$, alors :

$$\{\boldsymbol{u}\}\cap\{\sum_{i\in A}\lambda_i\boldsymbol{v}_i|\lambda_i>0\}=\emptyset$$

Nous savons que $C=\{\sum_{i\in A}\lambda_i\boldsymbol{v}_i|\lambda_i>0\}$ est un convexe. Notons P_C l'opérateur de projection sur ce convexe. Posons $\boldsymbol{s}=P_C(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}$. Nous souhaitons démontrer que $\boldsymbol{s}$ appartient à S. Par les propriétés de la projection sur un convexe, pour tout $\boldsymbol{w}$ dans C, $\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{w}-P_C(\boldsymbol{u}))\geq 0$. Donc en particulier comme $\boldsymbol{v}_i+P_C(\boldsymbol{u})$ appartient à C, nous avons $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}_i\geq 0$ pour tout i dans A. Il nous reste à calculer

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{s}&=(\boldsymbol{u}-P_C(\boldsymbol{u}))\cdot\boldsymbol{s}+P_C(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{s}\\&=-\|\boldsymbol{s}\|^2-(\boldsymbol{0}-P_C(\boldsymbol{u}))\cdot\boldsymbol{s})\\&\leq-\|\boldsymbol{s}\|^2\\&\leq 0.\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble S

$$S=\{\boldsymbol{s}|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}<0 \text{ et } \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i\geq 0\forall i\in A\}$$

est différent du vide.

L'implication, $\boldsymbol{u}=\sum\lambda_i\boldsymbol{v}_i$ avec $\lambda_i\geq 0$ implique $S=\emptyset$ est évidente.

Exercice 2 *Résoudre le sous-problème de trust-region pour le modèle linéaire.* Premièrement le gradient de m_{lin} est toujours $\boldsymbol{d}$ donc si $\boldsymbol{d}$ est non nul, le minimum est toujours atteint sur la frontière. On cherche donc à minimiser $y_0+R(\boldsymbol{d},\boldsymbol{u})$ en ayant posé $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{R}$ avec $\boldsymbol{u}$ sur la sphère unité. On cherche donc $\boldsymbol{u}$ dans la sphère unité minimisant $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{u})$ Par Cauchy Schwarz, cela implique $\boldsymbol{u}=-\frac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|}$. Donc $\boldsymbol{x}_{min}=\boldsymbol{x}-R\frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|}$.

Exercice 3 *Implémenter la méthode de trust region avec un modèle linéaire avec solution exacte du sous-problème.*

```
function [x,xk,Rk]=TrustRegionLinear(f,fp,x0,tol,maxiter,R0,rs,rv,gi,gd)
% TRUSTREGIONLINEAR trust region method with linear model
%   [x,xk,Rk]=TrustRegionLinear(f,fp,x0,tol,maxiter,r0,rs,rv,gi,gd)
%   finds an approximate minimum of the function f with gradient fp,
%   starting at the initial guess x0. The remaining parameters are
%   optional and default values are used if they are omited. xk
%   contains all the iterates of the method and rk the trust region
%   radii of all iterations.

if nargin<10, gd=0.5; end;
if nargin<9, gi=2; end;
if nargin<8, rv=0.9; end;
if nargin<7, rs=0.1; end;
if nargin<6, R0=1; end;
if nargin<5, maxiter=100; end;
if nargin<4, tol=1e-6; end;

x=x0;
xk=x0;
R=R0;
Rk=R0;
p=-feval(fp,x);
k=0;
while norm(p)>tol & k<maxiter
  s=R*p/norm(p);
  r=(feval(f,x)-feval(f,x+s))/(s'*p);
  if r>=rs
    x=x+s;
    p=-feval(fp,x);
    if r>-rv
      R=gi*R;
    end
  else
    R=gd*R
  end
  k=k+1;
  xk(:,k+1)=x;
  Rk(:,k+1)=R;
end;
```

Dans les exercices d'implémentation

– Afin de préserver l'uniformité des interfaces et permettre le remplacement transparent d'une implémentation par une autre, l'en-tête fourni doit impérativement être respecté et reproduit dans le code. Vous pouvez copier-coller depuis le PDF disponible sur la page web.
– Les programmes et les résultats doivent être rendus imprimés.

Evaluation du cours d'optimisation

- Les exercices : Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).

Assistant :	Kévin Santugini
Email :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`